TRIGONOMETRÍA

Javier ZARATIEGUI URDIN

ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA EN 4º DE ESO

TFM 2017

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Análisis de la enseñanza de la trigonometría en 4º de ESO

Javier Zaratiegui Urdin

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar el análisis de la enseñanza de la trigonometría en 4º de ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre la trigonometría, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º de ESO, en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

La trigonometría en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la trigonometría en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cinco capítulos. En los primeros tres capítulos se muestran, en forma de tabla, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a la trigonometría y la geometría en cada uno de los niveles. En el cuarto, se presentan ejemplos de las actividades tipo (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) propuestas en un libro de texto de 4º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1. La trigonometría en el currículo vigente

En este capítulo se aborda el análisis de los contenidos matemáticos presentes en el currículo actual relativos a la trigonometría, en las etapas de tercer ciclo de Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato. El motivo por el que se estudia solamente el tercer ciclo en Educación Primaria es que no se encuentran contenidos matemáticos relativos a la trigonometría en etapas anteriores.

Los currículos de referencia utilizados para cada nivel son:

- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El análisis se realiza utilizando una serie de descriptores que engloban varios aspectos del currículo relativos no sólo a la trigonometría, sino también a la geometría. Esto es debido a que la trigonometría es una rama matemática muy concreta, no presente hasta 4º de ESO.

Los descriptores utilizados son:

C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio.

C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos.

C-3: Trigonometría.

C-4: Funciones trigonométricas.

C-5: Geometría analítica.

C-6: Uso de herramientas y TICs.

En las etapas de Educación Primaria y de Bachillerato, algunos descriptores pertenecen a los bloques de Medida y Análisis respectivamente, y el resto al bloque de Geometría, razón por la cual se especifica el bloque en las Tablas 1 y 5. No ocurre lo mismo en el caso de la etapa de Educación Secundaria, en la que todos los descriptores pertenecen al bloque de Geometría, razón por la que el bloque no se especifica en las Tablas 2 - 4.

1.1. Contenidos en Educación Primaria.

Descriptor	Contenidos en tercer ciclo de Educación Primaria
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	*Bloque 4. Geometría* La situación en el plano y en el espacio: - Posiciones relativas de rectas y circunferencias. - Ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice… - Sistema de coordenadas cartesianas. - Descripción de posiciones y movimientos. La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas. Formas planas y espaciales: figuras planas: elementos, relaciones y clasificación:

	- Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. - Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. - Clasificación de los paralelepípedos. Concavidad y convexidad de figuras planas. - Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados. - Perímetro y área. - La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular. Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación: - Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas. - Tipos de poliedros. Cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera.
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	*Bloque 3. Medida* Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. *Bloque 4. Geometría* Regularidades y simetrías: Reconocimiento de regularidades.
C-3: Trigonometría	*Bloque 3. Medida* Medida de ángulos: - El sistema sexagesimal. - El ángulo como unidad de medida de un ángulo. Medida de ángulos.
C-6: Uso de herramientas y TICs	*Bloque 3. Medida* Desarrollo de estrategias para medir figuras de manera exacta y aproximada. Realización de mediciones.

Tabla 1. Contenidos relacionados con la trigonometría en Educación Primaria.

1.2. Contenidos en Educación Secundaria.

Los contenidos de la etapa de ESO se dividen en tres apartados: contenidos en 1º y 2º de ESO, contenidos en 3º de ESO y contenidos en 4º de ESO. A su vez, estos dos últimos se dividen en contenidos en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y contenidos en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. En 3º de ESO son dos opciones diferenciadas dentro de la misma asignatura de Matemáticas, mientras que en 4º de ESO son dos modalidades distintas, que conllevan la impartición de dos asignaturas diferentes.

1.2.1. Contenidos en 1º y 2º de ESO.

Descriptor	Contenidos en 1º y 2º de ESO
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. - Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. - Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. - Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. - Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Triángulos rectángulos. - El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. - Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. - Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. - Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.
C-3: Trigonometría	- Ángulos y sus relaciones.
C-6: Uso de herramientas y TICs	- Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. - Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 2. Contenidos relacionados con la trigonometría en 1º y 2º de ESO.

1.2.2. Contenidos en 3º de ESO.

Descriptor	Contenidos en 3º de ESO, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas	Contenidos en 3º de ESO, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	- Geometría del plano. - Lugar geométrico. - La esfera. Intersecciones de planos y esferas. - El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.	- Geometría del espacio: áreas y volúmenes. - El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Longitud y latitud de un punto.

C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. - Traslaciones, giros y simetrías en el plano. - Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.	- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. - Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
C-3: Trigonometría	-----------	- Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades.
C-6: Uso de herramientas y TICs	- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	-----------

Tabla 3. Contenidos relacionados con la trigonometría en 3º de ESO.

1.2.3. Contenidos en 4º de ESO.

Descriptor	Contenidos en 4º de ESO, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas	Contenidos en 4º de ESO, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.	- Resolución de problemas geométricos en el mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de diferentes cuerpos.
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	- Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	- Figuras semejantes. - Teoremas de Tales y Pitágoras. Aplicación de la semejanza para la obtención indirecta de medidas. - Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.
C-3: Trigonometría	- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. - Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	-----------
C-5: Geometría analítica	- Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.	-----------

C-6: Uso de herramientas y TICs	- Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	- Uso de aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

Tabla 4. Contenidos relacionados con la trigonometría en 4º de ESO.

1.3. Contenidos en Bachillerato.

En este apartado conviene aclarar que únicamente se han incluido los contenidos de los cursos de Bachillerato pertenecientes a la modalidad de Ciencias. El motivo es que en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, la asignatura de Matemáticas no incluye contenidos geométricos ni trigonométricos. Por otro lado, el Bachillerato perteneciente a la modalidad de Artes, no incluye el estudio de la asignatura de Matemáticas en su modalidad.

Descriptor	Contenidos en 1º de Bachillerato	Contenidos en 2º de Bachillerato
C-3: Trigonometría	*Bloque 4. Geometría* - Medida de un ángulo en radianes. - Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. - Razones trigonométricas de los ángulos suma, diferencia de otros dos, doble y mitad. Fórmulas de transformaciones trigonométricas. - Teoremas. Resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas. - Resolución de triángulos. Resolución de problemas geométricos diversos.	-----------
C-4: Funciones trigonomé-tricas	*Bloque 3. Análisis* - Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos.	-----------
C-5: Geometría analítica	*Bloque 4. Geometría* - Vectores libres en el plano. Operaciones geométricas. - Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores.	*Bloque 4. Geometría* - Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.

	- Bases ortogonales y ortonormales. - Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. - Lugares geométricos del plano. - Cónicas. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ecuación y elementos.	- Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. - Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos). - Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).

Tabla 5. Contenidos relacionados con la trigonometría en Bachillerato.

1.4. Síntesis de la evolución de los contenidos.

En Educación Primaria se introduce el razonamiento para calcular perímetros y áreas de figuras geométricas en el plano, y se utilizan ciertas propiedades, como la perpendicularidad y el paralelismo, para obtener distintos cuerpos geométricos.

En 1º y 2º de ESO se avanza hacia una formalización, ya que se emplea notación matemática en problemas de perímetros y áreas y se requiere de un razonamiento específico para resolverlos. Por otro lado, se introduce la aplicación de semejanzas y simetrías en figuras geométricas, así como el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de lados en triángulos rectángulos. De este modo se va afianzando lo visto en Educación Primaria y se añade mayor complejidad al estudio de la geometría.

En 3º de ESO el estudio de la geometría continúa un desarrollo más importante en la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Atendiendo a dicha opción, se observa un afianzamiento de los conceptos anteriores, tales como elementos y propiedades de figuras en el plano y en el espacio. También se profundiza en el concepto de simetría y semejanza de figuras, extendiendo su aplicación al uso de escalas en mapas y al teorema de Tales.

En la modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO se introduce el estudio de la trigonometría por primera vez. De esta manera, se vuelve a ampliar el abanico de herramientas disponibles para los estudiantes con las que resolver problemas que incluyan el cálculo de medidas de determinados objetos en distintas situaciones. Se introducen a su vez nociones básicas sobre geometría analítica.

En 1º de Bachillerato se parte de la trigonometría estudiada durante el curso anterior con el fin de afianzarla y llegar a dominar las medidas angulares expresadas en radianes. Se introducen los teoremas del seno, coseno y tangente para resolver cualquier tipo de triángulo. Se desarrolla a su vez la geometría analítica introducida durante el curso anterior, dentro de la cual se incluye como aspecto relevante el concepto de lugar geométrico. También se introduce el estudio de las funciones trigonométricas en el bloque de análisis, lo cual es posible gracias a los conocimientos previos estudiados sobre razones trigonométricas.

Por último, en 2º de Bachillerato se profundiza en el estudio de la geometría analítica mediante el tratamiento de vectores y ecuaciones de rectas, planos y determinadas figuras geométricas en el espacio.

En definitiva, se observa cómo el currículo tiene una estructura en espiral característica que incide sobe aspectos de cursos anteriores y va añadiendo nuevos conceptos y procedimientos que permiten ampliar el bagaje del estudiante a la hora de afrontar nuevos problemas y situaciones. A su vez, se observa cómo el estudio de la geometría va evolucionando de un enfoque más práctico con representaciones en el plano y en el espacio a otro más abstracto en el que se trabaja con lugares geométricos, coordenadas vectoriales y ecuaciones de la recta.

Capítulo 2. Los criterios de evaluación de la trigonometría en el currículo vigente.

En este capítulo se analizan los criterios de evaluación en la normativa vigente y se organizan en tablas atendiendo a los mismos descriptores señalados en el capítulo anterior. Al igual que ocurría en dicho capítulo, en la Tabla 6 se especifica el bloque al que pertenecen los criterios de evaluación, mientras que en las Tablas 7 y 8 no se hace por pertenecer todos ellos al bloque de Geometría.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria.

Descriptor	Criterios de evaluación en Educación Primaria
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	*Bloque 4. Geometría* 2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triangulo, trapecio y rombo. 3. Comprender el método de calcular el área de un paralelogramo, triángulo, trapecio, y rombo. Calcular el área de figuras planas. 4. Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas. 5. Conocer las características y aplicarlas a para clasificar: poliedros, prismas, pirámides, cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera y sus elementos básicos. 6. Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares. 7. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	*Bloque 4. Geometría* 1. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.
C-3: Trigonometría	*Bloque 3. Medida* 6. Conocer el sistema sexagesimal para realizar cálculos con medidas angulares.
C-6: Uso de herramientas y TICs	*Bloque 3. Medida* 1. Seleccionar, instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresando con precisión medidas de longitud, superficie, peso/masa, capacidad y tiempo, en contextos reales. 2. Escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso, estimando la medida de magnitudes de longitud, capacidad, masa y tiempo haciendo previsiones razonables.

Tabla 6. Criterios de evaluación relacionados con la trigonometría en Educación Primaria.

2.2. Criterios de evaluación en Educación Secundaria.

Este apartado combina, por un lado, los criterios de evaluación en 1º y 2º de ESO y, por otro, los de 3º y 4º de ESO correspondientes a la modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. No se incluyen en forma de tabla los criterios de evaluación de la modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas debido a su similitud. No obstante, las principales diferencias entre ambas se comentan al final de la Tabla 8.

2.2.1. Criterios de evaluación en 1º y 2º de ESO.

Descriptor	Criterios de evaluación en 1º y 2º de ESO.
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución. 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. 5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.). 6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. 6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.
C-5: Geometría analítica	2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución.
C-6: Uso de herramientas y TICs	2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución.

Tabla 7. Criterios de evaluación relacionados con la trigonometría en 1º y 2º de ESO.

2.2.2. Criterios de evaluación en 3º y 4º de ESO, modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Descriptor	Criterios de evaluación en 3º de ESO	Criterios de evaluación en 4º de ESO
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	-----------
C-3: Trigonometría	--------	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.

	----------	2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.
C-5: Geometría analítica	-----------	3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.

Tabla 8. Criterios de evaluación de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas relacionados con la trigonometría en 3º y 4º de ESO.

Las únicas diferencias entre los criterios de evaluación de esta modalidad y la de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas son las siguientes:

En 3º de ESO de la modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, el criterio nº2 no hace mención a áreas ni volúmenes, pero el resto está formulado de la misma manera. Adicionalmente, no aparece el criterio nº5.

En la modalidad de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, solamente hay dos criterios de evaluación. El primero de ellos es muy similar al criterio nº2 de la modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. El segundo criterio no aparece en la otra modalidad y se ubica dentro del descriptor C-6: ‘Uso de herramientas y TICs’. A continuación se presentan ambos criterios de evaluación redactados:

1. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas, y aplicando, así mismo, la unidad de medida más acorde con la situación descrita.

2. Utilizar aplicaciones informáticas de geometría dinámica, representando cuerpos geométricos y comprobando, mediante interacción con ella, propiedades geométricas.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato.

Descriptor	Criterios de evaluación en 1º de Bachillerato	Criterios de evaluación en 2º de Bachillerato
C-3: Trigonometría	*Bloque 4. Geometría* 1. Reconocer y trabajar con los ángulos en radianes manejando con soltura las razones trigonométricas de un ángulo, de su doble y mitad, así como las transformaciones trigonométricas usuales.	---------

	2. Utilizar los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales para resolver ecuaciones trigonométricas así como aplicarlas en la resolución de triángulos directamente o como consecuencia de la resolución de problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico.	
C-4: Funciones trigonométricas	*Bloque 3. Análisis* 4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	--------
C-5: Geometría analítica	*Bloque 4. Geometría* 3. Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias. Entender los conceptos de base ortogonal y ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades. 4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de distancias. 5. Manejar el concepto de lugar geométrico en el plano. Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos usuales, estudiando sus ecuaciones reducidas y analizando sus propiedades métricas.	*Bloque 4. Geometría* 1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores. 2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio. 3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.

Tabla 9. Criterios de evaluación relacionados con la trigonometría en Bachillerato.

En 3º de ESO se observa como en la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, los criterios de evaluación no son tan exigentes como en la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, al igual que ocurre en 4º de ESO con ambas modalidades. En los cursos de Bachillerato, solamente hay criterios de evaluación sobre trigonometría y geometría en la modalidad de Ciencias.

Esto es un reflejo de lo mismo que ocurre con los contenidos. Se observa un mayor desarrollo y profundización de los criterios de evaluación relacionados con la trigonometría y la geometría en la modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en 4º de ESO, y posteriormente, en la modalidad de Ciencias de Bachillerato.

Capítulo 3. Los estándares de aprendizaje evaluables en trigonometría en el currículo vigente.

En este capítulo se analizan los estándares de aprendizaje evaluables en la normativa vigente de manera similar a como se ha llevado a cabo el análisis de los contenidos y criterios de evaluación en los dos capítulos anteriores. Por motivos de espacio, los estándares se encuentran definidos al final de las Tablas 10 - 14, que engloban los estándares de aprendizaje evaluables en los distintos cursos.

Los estándares de aprendizaje evaluables son un desglose de los criterios de evaluación en otros más concretos con el fin de especificar la evaluación de unos determinados contenidos matemáticos. Generalmente, cada criterio de evaluación tiene asociado varios estándares de aprendizaje evaluables, de tal manera que éstos últimos vienen definidos por dos cifras. La primera hace referencia al criterio de evaluación del cual se deriva, mientras que la segunda corresponde a la numeración del estándar en cuestión dentro del criterio correspondiente.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th colspan="2">Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria</th></tr>
<tr><td>C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio</td><td colspan="2">Bloque 4. Geometría
1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 2.1; 3.1; 3.2; 4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 5.1; 5.2; 5.3; 6.1; 6.2; 7.1; 7.2.</td></tr>
<tr><td>C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos</td><td colspan="2">Bloque 4. Geometría
1.4; 1.5; 1.6; 1.7.</td></tr>
<tr><td>C-3: Trigonometría</td><td colspan="2">Bloque 3. Medida
6.1; 6.2; 6.3.</td></tr>
<tr><td>C-6: Uso de herramientas y TICs</td><td>Bloque 3. Medida
2.1; 2.2; 5.3; 6.2.</td><td>Bloque 4. Geometría
2.2.</td></tr>
</table>

Tabla 10. Estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la trigonometría en Educación Primaria.

Los criterios 7.1 y 7.2 no pertenecen a ninguno de los descriptores en concreto, ya que son generales a todos ellos, y describen razonamientos y argumentaciones lógicas seguidas por los estudiantes.

Definición de los estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria.

Bloque 3. Medida.

6.1.: Identifica el ángulo como medida de un giro o abertura.

6.2.: Mide ángulos usando instrumentos convencionales.

6.3.: Resuelve problemas realizando cálculos con medidas angulares.

Bloque 4. Geometría.

1.1.: Identifica y representa posiciones relativas de rectas y circunferencias.

1.2. Identifica y representa ángulos en diferentes posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice…

1.3. Describe posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros…

1.4. Realiza escalas y gráficas sencillas, para hacer representaciones elementales en el espacio.

1.5. Identifica en situaciones muy sencillas la simetría de tipo axial y especular.

1.6. Traza una figura plana simétrica de otra respecto de un eje.

1.7. Realiza ampliaciones y reducciones.

2.1. Clasifica triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos, identificando las relaciones entre sus lados y entre ángulos.

2.2. Utiliza instrumentos de dibujo y herramientas tecnológicas para la construcción y exploración de formas geométricas.

3.1. Calcula el área y el perímetro de: rectángulo, cuadrado, triangulo.

3.2. Aplica los conceptos de perímetro y superficie de figuras para la realización de cálculos sobre planos y espacios reales y para interpretar situaciones de la vida diaria.

4.1. Clasifica cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.

4.2. Identifica y diferencia los elementos básicos de circunferencia y circulo: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular.

4.3. Calcula, perímetro y área de la circunferencia y el círculo.

4.4. Utiliza la composición y descomposición para formar figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras.

5.1. Identifica y nombra polígonos atendiendo al número de lados.

5.2. Reconoce e identifica, poliedros, prismas, pirámides y sus elementos básicos: vértices, caras y aristas.

5.3. Reconoce e identifica cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera y sus elementos básicos.

6.1. Comprende y describe situaciones de la vida cotidiana, e interpreta y elabora representaciones espaciales (planos, croquis de itinerarios, maquetas…), utilizando las nociones geométricas básicas (situación, movimiento, paralelismo, perpendicularidad, escala, simetría, perímetro, superficie).

6.2. Interpreta y describe situaciones, mensajes y hechos de la vida diaria utilizando el vocabulario geométrico adecuado: indica una dirección, explica un recorrido, se orienta en el espacio.

7.1. Resuelve problemas geométricos que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.

7.2. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria.

A continuación, se pasa a dividir los estándares de aprendizaje evaluables en tres subgrupos. El primer subgrupo lo componen los cursos de 1º y 2º de ESO, el segundo, el curso de 3º de ESO, y el tercero el curso de 4º de ESO.

3.2.1. Estándares de aprendizaje evaluables en 1º y 2º de ESO.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 1º y 2º de ESO.
C-2: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 2.1; 2.2; 3.1; 3.2; 5.1; 5.2; 5.3; 6.1.
C-3: Simetría y semejanza de objetos geométricos	4.1; 4.2.
C-5: Uso de herramientas y TICs	2.1; 5.2.

Tabla 11. Estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la trigonometría en 1º y 2º de ESO.

Definición de los estándares de aprendizaje evaluables en 1º y 2º de ESO.

1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.

1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.

1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.

1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo.

2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.

3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.

5.2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados.

5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.

6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.

3.2.2. Estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas	Estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	1.1; 1.2; 4.1; 4.2; 5.1; 5.2; 6.1.	1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 4.1; 4.2; 5.1.
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	2.1; 2.2; 2.3; 3.1; 5.3.	2.1; 2.2; 3.1.
C-6: Uso de herramientas y TICs	4.2.	4.2.

Tabla 12. Estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la trigonometría en 3º de ESO.

Definición de los estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos.

1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.

2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.

2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.

2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.

5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

Definición de los estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

Son los mismos que el apartado anterior salvo 5.2, 5.3 y 6.1 que no aparecen, y el 1.3 y 1.4 expuestos a continuación, no presentes en el caso anterior:

1.3. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos en los que intervienen ángulos.

1.4. Calcula el perímetro de polígonos, la longitud de circunferencias, el área de polígonos y de figuras circulares, en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.

3.2.3. Estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas	Estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas
C-1: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	2.1; 2.3.	1.1; 1.2; 1.3; 1.4.
C-2: Simetría y semejanza de objetos geométricos	--------	1.1; 1.2; 1.4.
C-3: Trigonometría	1.1; 2.1; 2.2.	---------

C-5: Geometría analítica	3.1; 3.2; 3.3; 3.4; 3.5.	--------
C-6: Uso de herramientas y TICs	1.1; 2.1; 3.6.	1.1; 2.1.

Tabla 13. Estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la trigonometría en 4º de ESO.

Definición de los estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.

2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.

2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.

2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.

3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.
3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.

3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.

3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.

3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.

3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Definición de los estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

1.1. Utiliza los instrumentos apropiados, fórmulas y técnicas apropiadas para medir ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas, interpretando las escalas de medidas.

1.2. Emplea las propiedades de las figuras y cuerpos (simetrías, descomposición en figuras más conocidas, etc.) y aplica el teorema de Tales, para estimar o calcular medidas indirectas.

1.3. Utiliza las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades correctas.

1.4. Calcula medidas indirectas de longitud, área y volumen mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos.

2.1. Representa y estudia los cuerpos geométricos más relevantes (triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) con una aplicación informática de geometría dinámica y comprueba sus propiedades geométricas.

3.3.Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 1º de Bachillerato	Estándares de aprendizaje evaluables en 2º de Bachillerato
C-3: Trigonometría	*Bloque 4. Geometría* 1.1; 2.1.	-------
C-4: Funciones trigonométricas	*Bloque 3. Análisis* 4.1; 4.2.	-------
C-5: Geometría Analítica	*Bloque 4. Geometría* 3.1; 3.2; 4.1; 4.2; 4.3; 5.1.	*Bloque 4. Geometría* 1.1; 2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 3.1; 3.2; 3.3.
C-6: Uso de herramientas y TICs	*Bloque 4. Geometría* 5.2.	*Bloque 4. Geometría* 3.4.

Tabla 14. Estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la trigonometría en Bachillerato.

Definición de los estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato. Modalidad de Ciencias.

1º Bachillerato

Bloque 4. Geometría.

1.1. Conoce las razones trigonométricas de un ángulo, su doble y mitad, así como las del ángulo suma y diferencia de otros dos.

2.1. Resuelve problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico, utilizando los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales.

3.1. Emplea con asiduidad las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro.

3.2. Calcula la expresión analítica del producto escalar, del módulo y del coseno del ángulo.

4.1. Calcula distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas.

4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos.

4.3. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas.

5.1. Conoce el significado de lugar geométrico, identificando los lugares más usuales en geometría plana así como sus características.

5.2. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos en las que hay que seleccionar, estudiar posiciones relativas y realizar intersecciones entre rectas y las distintas cónicas estudiadas.

Bloque 3. Análisis

4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

2º Bachillerato.

1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.

2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.

2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.

2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.

3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.

Capítulo 4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la geometría en el currículo vigente

En este apartado se van a analizar las actividades tipo presentes en distintos libros de texto de cursos que abarcan desde 2º de ESO hasta 2º de Bachillerato, los cuales se detallan en las secciones siguientes, así como en el apartado de Referencias al final del trabajo. Los libros de texto que abarcan los cursos comprendidos entre 2º de ESO y 4º de ESO son los mismos utilizados por el centro en el que se han realizado las prácticas. Los libros pertenecientes a los dos cursos de Bachillerato no se utilizan en dicho centro ya que no hay cursos de esta índole en el mismo.

Por otra parte, las distintas actividades presentes en los mismos se clasifican en ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones. Las definiciones de dichas actividades se presentan a continuación:

Ejercicio: Tarea que requiere de unos pasos para su resolución que son conocidos.

Problema: Tarea que requiere de unos pasos para su resolución que son desconocidos. No obstante, las técnicas aplicadas para su resolución se asocian a las de los ejercicios.

Cuestión: Pregunta formulada para obtener una respuesta que no es necesariamente numérica, sino fruto de un análisis. No se asocia a la aplicación de cálculos y técnicas estandarizadas, sino a la fundamentación, explicación, descripción y comprensión de los conceptos puestos en juego.

Situación: Dinámica planteada con el fin de posibilitar una evolución en el aprendizaje mediante una serie de pautas, tareas y fases que estructuran su resolución.

4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO.

El libro de texto utilizado como referencia es el libro de Matemáticas 2 ESO de la Editorial SM – Savia, y los temas que tratan la geometría son el Tema 9 (Medidas. teorema de Pitágoras), el Tema 10 (Semejanza) y el Tema 11 (Cuerpos geométricos).

Las actividades se han escogido en base a la representatividad de los contenidos trabajados con más frecuencia a lo largo de los temas señalados:

- unidades de medida de distintas magnitudes, relacionando algunas de éstas últimas entre sí. El tiempo como sistema de medida sexagesimal;
- teoremas de Pitágoras y de Tales, tanto en ejercicios y problemas contextualizados como descontextualizados;
- propiedades y características de distintos cuerpos geométricos.
- cálculo de perímetros y áreas en figuras en el plano, así como el cálculo de áreas y volúmenes de figuras en el espacio;
- razón de proporcionalidad de figuras en el plano y en el espacio.

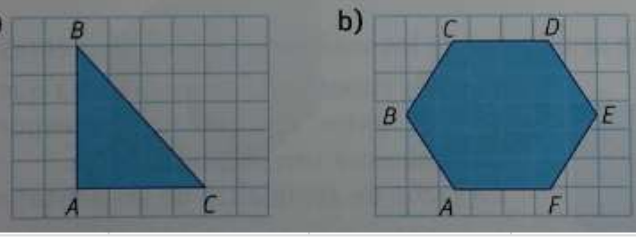
<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>☐ Ejercicio</td><td>☐ Problema</td><td>■ Cuestión</td><td>☐ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Relación entre distintos intrumentos y unidades de medida en diferentes objetos o situaciones. No queda explícita la búsqueda de una determinada unidad de medida.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">1. Indica algún instrumento de medida que consideres adecuado para cada una de las siguientes situaciones.
a) Amueblar una habitación.
b) Darle jarabe para la tos a un niño pequeño.
c) Obtener las marcas obtenidas en unos juegos escolares que incluyen salto de longitud, de altura y lanzamiento de peso.
d) Duración de una canción de tu artista favorito.
e) Saber si las maletas cumplen los requisitos para poder subirlas al avión.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>☐ Ejercicio</td><td>■ Problema</td><td>☐ Cuestión</td><td>☐ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Conversión entre las formas compleja e incompleja de unidades de medida sexagesimales (tiempo), comparación y operación con las mismas.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">13. Elia ha anotado el tiempo que tarda en llegar el tren.
<table><tr><td>Lunes</td><td>10 min 35 s</td></tr><tr><td>Martes</td><td>8,52 min</td></tr><tr><td>Miércoles</td><td>755 s</td></tr><tr><td>Jueves</td><td>5 min 55 s</td></tr><tr><td>Viernes</td><td>10,35 min</td></tr></table>a) ¿Qué día ha tenido que esperar más tiempo?
b) ¿Cuánto tiempo ha esperado en total esta semana?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>☐ Ejercicio</td><td>■ Problema</td><td>☐ Cuestión</td><td>☐ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Relación entre magnitudes distintas (tiempo-longitud). Utilización del Teorema de Pitágoras para hallar unidades de distancia (metros).</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">88. Elena anda en una hora 5 km, y Javier, 4 km.
a) Si salen a la vez, del mismo sitio y en la misma dirección, ¿a qué distancia se encontrarán uno de otro después de 2 h 40 min 25 s?
b) Si salen a la vez del mismo sitio y en direcciones perpendiculares, ¿a qué distancia se encontrarán uno del otro después de 45 min 20 s?</td></tr>
</table>

Actividad tipo	■ Ejercicio	☐ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Distinción entre perímetro y área de figuras poligonales. Utilización de las medidas correspondientes en cada caso, aplicando el teorema de Pitágoras cuando proceda.			
Ejemplo	69. Calcula el perímetro y el área de cada uno de los siguientes trapecios. a) b)  			

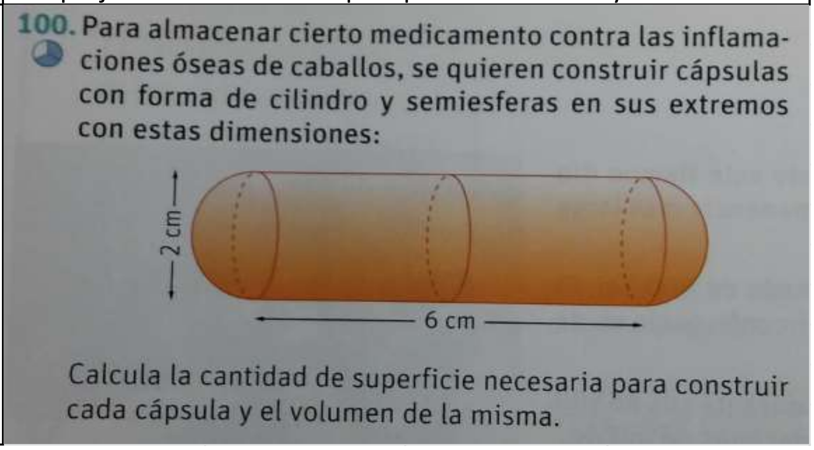
Actividad tipo	■ Ejercicio	☐ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Relación entre altura, hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo. Aplicación del Teorema de Pitágoras y de la altura para hallar elementos desconocidos.			
Ejemplo	21. En un triángulo rectángulo los catetos miden 24 cm y 7 cm, respectivamente. a) ¿Cuánto mide la hipotenusa? b) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa? c) Calcula el área del triángulo.			

Actividad tipo	■ Ejercicio	☐ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	División de segmentos en partes proporcionales. Relación de semejanza entre figuras geométricas con razón de semejanza en función de la longitud (perímetro), área o volumen.			
Ejemplo	24. Divide un segmento de 10 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 3 y 4. 25. Construye polígonos semejantes a los siguientes con razón de semejanza $\frac{2}{3}$ en tu cuaderno. a) b)  			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre razones de semejanza longitudinales (perímetro) y de áreas de dos figuras geométricas. Utilización de la relación entre ambas razones para hallar medidas desconocidas.			
Ejemplo	72. Un triángulo rectángulo tiene catetos de medidas 3 y 4 cm. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que el área de este segundo triángulo es de 24 cm^2. 73. Las áreas de dos cuadriláteros semejantes son 18 m^2 y 28,125 m^2, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del menor si el del mayor es de 22,5 m?			

Actividad tipo	□ Ejercicio	■ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Utilización del Teorema de Tales para hallar longitudes desconocidas, estableciendo las relaciones de semejanza entre segmentos oportunas.			
Ejemplo	83. Un edificio de cinco plantas de igual altura proyecta, en cierto instante, una sombra de 22 m. Calcula la altura de cada planta si se sabe que en ese mismo momento un árbol de 3 m de altura proyecta una sombra de 4,5 m.			

Actividad tipo	□ Ejercicio	□ Problema	■ Cuestión	□ Situación
Descripción	Síntesis de propiedades y características de figuras geométricas y elementos contenidos o pertenecientes a ellas.			
Ejemplo	89. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas. a) Si un punto pertenece a una recta y a un plano, la recta está contenida en el plano. b) Si dos planos son perpendiculares a una recta, son paralelos entre sí. c) Los poliedros que tienen dos caras paralelas iguales son, con seguridad, prismas. d) No existe ninguna pirámide triangular cóncava. e) El número de caras de una pirámide siempre es un número impar. f) Al cortar un cono por dos planos paralelos a la base, se obtiene un tronco de cono.			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación y cálculo de áreas y volúmenes en ciertas figuras geométricas de tres dimensiones. Descomposición de figuras complejas en otras más simples para hallar áreas y volúmenes.			
Ejemplo	 **100.** Para almacenar cierto medicamento contra las inflamaciones óseas de caballos, se quieren construir cápsulas con forma de cilindro y semiesferas en sus extremos con estas dimensiones: Calcula la cantidad de superficie necesaria para construir cada cápsula y el volumen de la misma.			

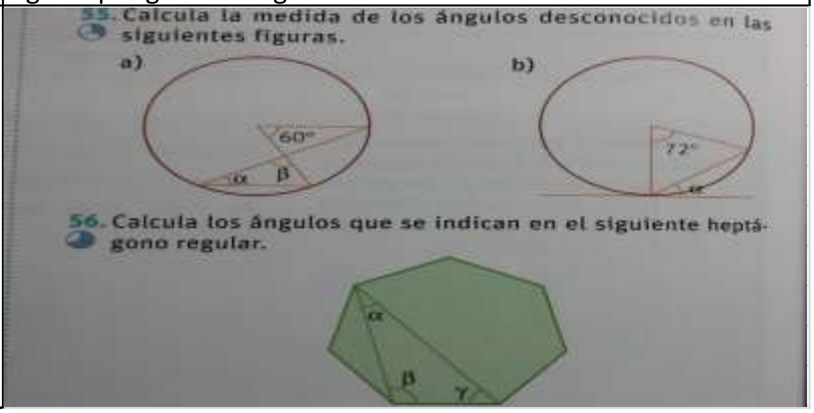
En 2º de ESO se trabaja de manera exhaustiva con figuras en el plano y en el espacio, calculando perímetros, áreas y volúmenes de las mismas. Se practica también las distintas razones de semejanza en objetos geométricos (longitudinal, de áreas y volumétricas) y se introducen unidades y sistemas de medida, con especial atención al sistema de medida sexagesimal.

4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO.

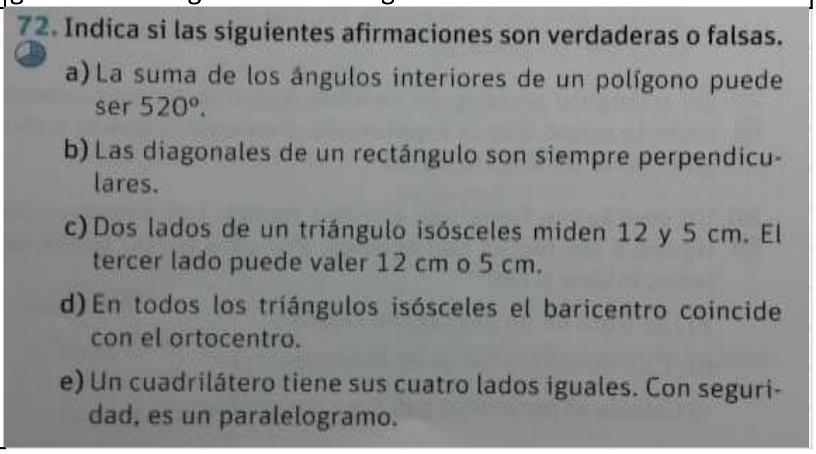
El libro de texto utilizado como referencia es el libro de Matemáticas 3 ESO orientadas a las enseñanzas académicas de la Editorial SM – Savia, los temas que tratan la geometría son el Tema 6 (Proporcionalidad), el Tema 7 (Figuras planas), el Tema 8 (Movimientos en el plano) y el Tema 9 (Cuerpos geométricos).

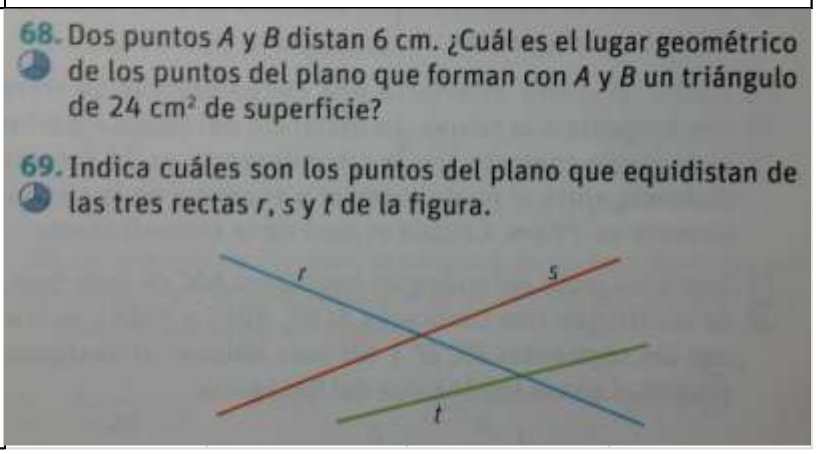
Las actividades presentes en el libro de texto trabajan de manera exhaustiva los siguientes contenidos:

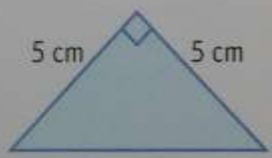
- el cálculo de perímetros y áreas de figuras complejas;
- la definición de lugares geométricos;
- la medición de ángulos en figuras en el plano y la relación que guardan en las mismas;
- el conocimiento de los puntos y las rectas características de los triángulos;
- la aplicación de movimientos en el plano (traslación, giros…) y la representación de vectores en el mismo;
- la aplicación de las simetrías axial y central en figuras y elementos en el plano;
- la aplicación de las propiedades esféricas al caso particular de la Tierra.

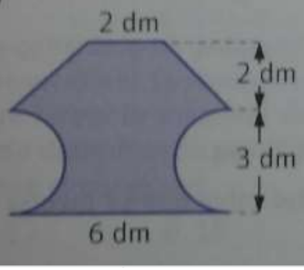
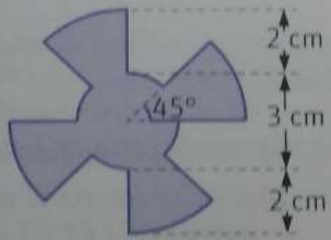
<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>■ Ejercicio</td><td>□ Problema</td><td>□ Cuestión</td><td>□ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Resolución de medidas angulares en figuras circulares (relación con el ángulo central). Resolución de medidas angulares en figuras poligonales regulares.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">
55. Calcula la medida de los ángulos desconocidos en las siguientes figuras.

56. Calcula los ángulos que se indican en el siguiente heptágono regular.
</td></tr>
</table>

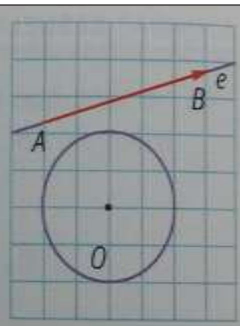
<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>□ Ejercicio</td><td>□ Problema</td><td>■ Cuestión</td><td>□ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Relación entre distintos elementos y sus propiedades en figuras poligonales, con especial atención a los triángulos. Relación que guardan los ángulos en tales figuras.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">
72. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) La suma de los ángulos interiores de un polígono puede ser 520º.
b) Las diagonales de un rectángulo son siempre perpendiculares.
c) Dos lados de un triángulo isósceles miden 12 y 5 cm. El tercer lado puede valer 12 cm o 5 cm.
d) En todos los triángulos isósceles el baricentro coincide con el ortocentro.
e) Un cuadrilátero tiene sus cuatro lados iguales. Con seguridad, es un paralelogramo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>■ Ejercicio</td><td>□ Problema</td><td>□ Cuestión</td><td>□ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Definición del concepto de lugar geométrico y posterior aplicación a situaciones concretas.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">
68. Dos puntos A y B distan 6 cm. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano que forman con A y B un triángulo de 24 cm² de superficie?
69. Indica cuáles son los puntos del plano que equidistan de las tres rectas r, s y t de la figura.
</td></tr>
</table>

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre puntos y rectas notables de un triángulo. Intersección de las mediatrices y bisectices en el circuncentro e incentro respectivamente.			
Ejemplo	13. Copia este triángulo en tu cuaderno y dibuja el incentro y el circuncentro. Representa también las circunferencias inscrita y circunscrita.  14. Dibuja un triángulo equilátero de lado 5 cm y sus circunferencias inscrita y circunscrita.			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Cálculo del perímetro y área de figuras complejas mediante su descomposición en otras más simples.			
Ejemplo	65. Calcula el perímetro y el área de las siguientes zonas sombreadas: a)  b) 			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación de la expresión analítica de un vector con sus coordenadas en un sistema de referencia cartesiano. Realización de operaciones vectoriales (de forma analítica).			
Ejemplo	27. Dados los puntos $A(2, -4)$, $B(-2, 3)$ y $C(-2, 4)$, calcula las coordenadas de los vectores: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ b) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ c) $-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{AC}$ 28. Dados $A(-5, 4)$, $B'(-1, +2)$ y $\vec{u}=(0, 3)$: a) Calcula las coordenadas del punto A' tal que $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$. b) Calcula las coordenadas del punto B tal que $\overrightarrow{BB'}=\vec{u}$.			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Obtención de figuras geométricas y elementos del plano mediante movimientos de traslación, giros y simetrías axiales.			
Ejemplo	**58.** Dibuja en tu cuaderno la figura homóloga de la circunferencia de la figura mediante: a) La traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ b) El giro de centro *O* y amplitud 30° c) La simetría axial de eje *e* d) La simetría central de centro *O* 			

Actividad tipo	□ Ejercicio	□ Problema	■ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación de medidas angulares y coordenadas geográficas en la Tierra mediante su aproximación a una esfera.			
Ejemplo	**27.** Razona en cada caso si es verdadero o falso. a) El Ecuador es la única circunferencia máxima de la Tierra. b) Cada huso horario tiene una amplitud de 15° porque 360° : 24 = 15°. c) Los puntos de un paralelo tienen la misma longitud.			

En 3º de ESO, los contenidos de los temas de proporcionalidad y de cuerpos geométricos sirven de repaso de los estudiados en el curso anterior.

Una de las novedades es el estudio de las coordenadas geográficas del globo terrestre, junto a otros conceptos como latitud, longitud y husos horarios. También se incluyen, como aspectos novedosos, la determinación de lugares geométricos, la medición de ángulos en figuras planas y el conocimiento de puntos y rectas características de los triángulos.

Por último, se introduce el trabajo con vectores (coordenadas y movimientos de traslación), giros a partir de un origen con una determinada amplitud, y las simetrías axial y central aplicadas a figuras planas.

4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO.

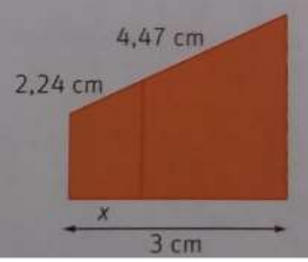
Los temas del libro de Matemáticas 4 ESO orientadas a las enseñanzas académicas; Editorial SM – Savia que tratan la trigonometría son el Tema 5 (Semejanza y trigonometría) y el Tema 6 (Aplicaciones de la trigonometría).

Las actividades mostradas a continuación trabajan sobre todo los siguientes contenidos:

- las razones de semejanza en figuras geométricas y la aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras, así como los teoremas de la altura y de los catetos;
- la definición de razones trigonométricas en triángulos rectángulos;

- la relación entre razones trigonométricas de distintos cuadrantes;
- las razones trigonométricas de cualquier ángulo;
- la conversión entre grados sexagesimales y radianes;
- la resolución de identidades trigonométricas, aplicando relaciones entre razones trigonométricas;
- la resolución de ecuaciones trigonométricas;
- la resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos, aplicando los teoremas del seno y del coseno;
- el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas, aplicando razones trigonométricas.

Actividad tipo	□ Ejercicio	□ Problema	■ Cuestión	□ Situación
Descripción	Utilización de los criterios de semejanza de triángulos.			
Ejemplo	**11.** Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando tu respuesta. a) Dos triángulos isósceles siempre son semejantes. b) Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° es semejante a otro con un ángulo de 60°.			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Aplicación de razones de semejanza en figuras geométricas. Uso del teorema de Tales para hallar longitudes de segmentos en posición de Tales (no necesariamente en disposición triangular).			
Ejemplo	**50.** Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su perímetro mida 40 cm. **51.** Calcula la longitud *x*. 			

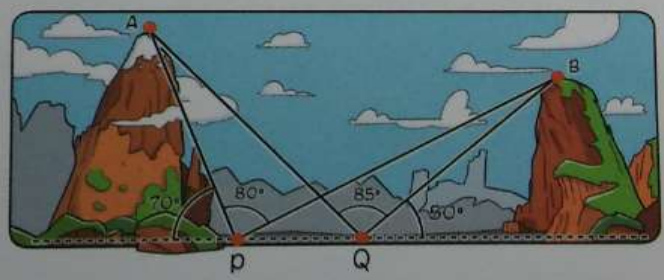
Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre ángulos y razones trigonométricas ubicadas en distintos cuadrantes, utilizando como referencia la circunferencia goniométrica.			
Ejemplo	**82.** Comprueba si existe un ángulo α tal que: a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}52$ y $\cos\alpha = 0{,}43$ b) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}483$ y $\sec\alpha = 1{,}789$ c) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}7071$ y $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}7002$ **83.** Si $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, y α es un ángulo agudo halla: a) $\operatorname{sen}(\alpha + 180°)$ c) $\cos(180° - \alpha)$ b) $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$ d) $\operatorname{sen}(-\alpha)$			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación de ángulos que presentan las mismas razones trigonométricas. Conversión entre grados y radianes como medidas angulares.			
Ejemplo	**62.** Expresa en grados sexagesimales la medida de los siguientes ángulos dados en radianes. a) 7π c) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{7\pi}{8}$ d) $\frac{4\pi}{3}$ f) $\frac{5\pi}{11}$ **63.** Expresa los siguientes ángulos como la suma de un ángulo positivo menor de 360° y un número entero de vueltas completas. a) 650° c) 1520° e) 610° b) 900° d) 3640° f) 1925°			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre razones trigonométricas para la demostración o simplificación de igualdades trigonométricas. Resolución de ecuaciones trigonométricas con infinitas soluciones.			
Ejemplo	**85.** Demuestra esta igualdad trigonométrica. $\dfrac{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}}{1+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ **90.** Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados. a) $\cos(3x - 40°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2\operatorname{sen}(x + 100) = \sqrt{3}$ c) $\operatorname{tg}(4x - 25°) = 1$			

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>☐ Ejercicio</td><td>■ Problema</td><td>☐ Cuestión</td><td>☐ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Aplicación de las razones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">6. Se ha colocado un proyector sobre un trípode de 1,2 m y a una distancia de 5 m de la pantalla medida en la horizontal. La imagen proyectada está a 3 m del suelo.

¿Qué inclinación sobre la horizontal tiene el foco del proyector?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>☐ Ejercicio</td><td>■ Problema</td><td>☐ Cuestión</td><td>☐ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Aplicación de las razones trigonométricas y los teoremas del seno y coseno en la resolución de triángulos no rectángulos.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">49. Se quiere calcular la distancia que separa las cimas de dos montañas. Para ello, se fijan dos puntos P y Q distantes entre sí 50 m y los ángulos que aparecen en la figura.


¿Cuál es la distancia entre las dos cimas?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>☐ Ejercicio</td><td>■ Problema</td><td>☐ Cuestión</td><td>☐ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Relación entre las razones trigonométricas y el área y volumen de figuras geométricas en el espacio.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">28. Calcula la superficie de un prisma de altura 5 cm y cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de catetos 2 cm.

29. El volumen de una pirámide es de 1000 m³, su base es un cuadrado y el ángulo de las alturas laterales con la base es de 30°. ¿Cuál es la longitud del lado de la base? ¿Y la altura de la pirámide?</td></tr>
</table>

En 4º de ESO, se repasa la semejanza de figuras geométricas, el teorema de Tales y los teoremas de la altura y del cateto.

Se introduce por primera vez el estudio de la trigonometría. Se definen las razones trigonométricas en triángulos rectángulos y, posteriormente, en la circunferencia goniométrica. También se trabaja la resolución de triángulos y el cálculo de áreas y volúmenes empleando razones trigonométricas.

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato.

El tema del libro de Matemáticas 1, Ciencias y Tecnología de Ediciones SM que trata la trigonometría es el Tema 3 (Trigonometría).

En este libro de texto las actividades trabajan muchos de los contenidos mencionados en el curso anterior, introduciendo como novedad las siguientes relaciones trigonométricas:

- fórmulas de las razones trigonométricas de la suma y resta de dos ángulos dados;
- fórmulas de las razones trigonométricas de los ángulos doble y mitad a uno dado;
- transformación de expresiones trigonométricas en las que interviene una suma de dos ángulos distintos en otra expresión en la que interviene el producto de razones trigonométricas.

<table>
<tr><td>Actividad tipo</td><td>■ Ejercicio</td><td>☐ Problema</td><td>☐ Cuestión</td><td>☐ Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="4">Relación entre las unidades de medida angulares expresadas como grados sexagesimales o radianes.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td colspan="4">30 Pasa de grados a radianes.
a) 585° c) $76^\circ\ 52'\ 30''$
b) 450° d) $382^\circ\ 30'$

31 Pasa de radianes a grados.
a) $\frac{41\pi}{3}$ rad c) $\frac{11\pi}{12}$ rad
b) 13π rad d) 5 rad</td></tr>
</table>

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre razones trigonométricas de ángulos cualesquiera pertenecientes a distintos cuadrantes. El uso de parámetros como datos implica una dificultad añadida.			
Ejemplo	**42** Calcula, en función de h, la razón trigonométrica que se indica en cada caso. a) $\operatorname{cosec}\frac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{5} = -h^2$. b) $\sec 305°$, sabiendo que $\operatorname{cotg} 55° = \frac{1}{h}$. c) $\operatorname{tg} 348°$, sabiendo que $\cos 192° = -h^2$. **43** Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h: a) $\operatorname{sen}(90° - \alpha)$ b) $\operatorname{tg}(1080° - \alpha)$			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Aplicación de las razones trigonométricas de la suma y resta de dos ángulos, y de los ángulos doble y mitad.			
Ejemplo	**49** Si $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}4$ y $\cos\beta = -0{,}5$, siendo $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, calcula: a) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ **50** Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α en cada caso. a) Si α es un ángulo del primer cuadrante. b) Si α es un ángulo del tercer cuadrante. **51** Calcula el valor de la tangente de α sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.			

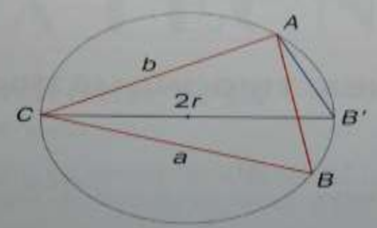
Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Demostración de identidades trigonométricas complejas usando relaciones más sencillas entre razones trigonométricas.			
Ejemplo	**59** Demuestra las siguientes identidades trigonométricas. a) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1} = \cos\alpha$ b) $\frac{1 + \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$ c) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha$ d) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha$ e) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Simplificación de expresiones trigonométricas complejas usando relaciones más sencillas entre razones trigonométricas.			
Ejemplo	**60** Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas. a) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2$ b) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)$ c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ d) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}$ e) $\operatorname{sen}2\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$ f) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}$ g) $\frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas, acotando el intervalo solución.			
Ejemplo	**67** TIC Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. a) $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}6x = 0$ b) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$ c) $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = 2$ **68** TIC Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0°, 360°]$. a) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2x + \cos^2y = \frac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2x - \cos^2y = \frac{3}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$ c) $\begin{cases} \operatorname{sen}x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen}y = \frac{1}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases}$			

Actividad tipo	□ Ejercicio	■ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Resolución de triángulos rectángulos mediante sistemas de ecuaciones trigonométricas (empleando relaciones entre razones trigonométricas).			
Ejemplo	**76** Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42°. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24°. Calcula la altura del pino.			

Actividad tipo	☐ Ejercicio	■ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Asociación de la pendiente de la recta que contiene a la hipotenusa, en un triángulo rectángulo, con la tangente.			
Ejemplo	 75 Una señal de tráfico indica que la inclinación de un tramo de carretera es del 8%, lo cual quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura. a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal? b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125?			

Actividad tipo	■ Ejercicio	☐ Problema	☐ Cuestión	☐ Situación
Descripción	Relación entre los elementos de un triángulo y su circunferencia circunscrita mediante el empleo de razones trigonométricas.			
Ejemplo	110 Demuestra que dado el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él:  a) Se cumple la relación: $r = \frac{b}{2\,\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{a}{2\,\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{c}{2\,\text{sen}\,\widehat{C}}$ (Ten en cuenta la relación entre los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{B}'$.) b) El área del triángulo se puede calcular como $A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$			

En 1º de Bachillerato, se profundiza en los contenidos trigonométricos del curso anterior, aumentando el nivel de dificultad. También se añaden nuevas relaciones trigonométricas, tales como:

- razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos y de los ángulos doble y mitad;
- transformación de la suma de razones trigonométricas de dos ángulos distintos en productos de razones trigonométricas.

4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato.

Los temas del libro de Matemáticas 2, Ciencias y Tecnología de Ediciones SM que tratan la trigonometría de forma indirecta, en alguna de sus secciones, son el Tema 4

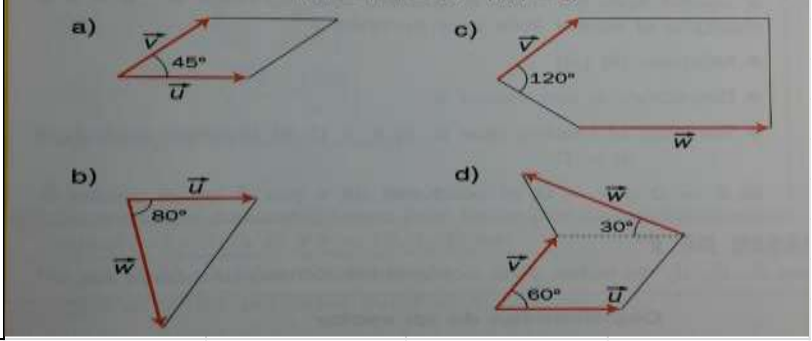
(Vectores en el espacio), el Tema 6 (Propiedades métricas) y el Tema 7 (Lugares geométricos en el espacio).

Las actividades más representativas del libro de texto en las que interviene la trigonometría son aquéllas en las que se trabajan los siguientes contenidos:

- el cálculo de los productos escalar y vectorial de vectores y el ángulo formado por dos vectores en el plano;
- el cálculo del ángulo formado por planos y rectas en el espacio;
- la asociación del módulo del producto vectorial con el área del paralelogramo determinado por los dos vectores implicados;
- la conversión de coordenadas cartesianas a coordenadas polares, cilíndricas o esféricas.

Actividad tipo	■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción	Relación entre la razón trigonométrica coseno y el ángulo formado por dos vectores mediante la expresión del producto escalar de los mismos.
Ejemplo	**11.** Sean los vectores $\vec{u} = (2, 0, 4)$ y $\vec{v} = (m, 0, 3)$ referidos a una base ortonormal *B*. **a)** Calcula *m* para que el ángulo que formen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea 60°. **b)** Para este valor de *m*, halla $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\lvert\vec{u}\rvert$, $\lvert\vec{v}\rvert$ y los ángulos que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con los vectores de la base.

Actividad tipo	■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción	Relación de las razones trigonométricas seno y coseno con el producto vectorial y escalar de dos vectores, respectivamente.
Ejemplo	**14.** Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección: **a)** ¿Cómo será su producto escalar? **b)** ¿Cómo será su producto vectorial?

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Interpretación del módulo del vector producto vectorial como el área del paralelogramo cuyos lados están asociados a dichos vectores.			
Ejemplo	**75** Determina el área de las siguientes figuras, teniendo en cuenta que, en todos los casos, los módulos de los vectores son: $\lvert\vec{u}\rvert = \lvert\vec{v}\rvert = 2; \quad \lvert\vec{w}\rvert = 3$ 			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Determinación del ángulo que forman dos planos secantes basada en el ángulo de los vectores perpendiculares a cada uno de ellos.			
Ejemplo	**3.** Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de planos. a) $\pi: x + y + z = 0 \qquad \pi': 3x - z = -2$ b) $\pi: -x + 4y + 2z = 3 \qquad \pi': y = 5$			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Determinación del ángulo formado entre planos y rectas basada en el ángulo que forman los vectores normales a los primeros con los vectores directores de las segundas.			
Ejemplo	**5.** Halla el ángulo formado por los siguientes planos y rectas. a) $\pi: x + y - 2z = -1, \; r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ b) $\pi: -3x + 2y + z = 3, \; r: \begin{cases} y = -3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre las coordenadas cartesianas y polares en puntos situados en el plano.			
Ejemplo	**7.** Pasa a coordenadas polares los siguientes puntos dados en cartesianas: $A(3, 3)$; $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $C(-1, 0)$; $D(3, -\sqrt{3})$. **8.** Pasa a coordenadas cartesianas los puntos que tienen por coordenadas polares: $A(2, \pi)$; $B\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$; $C(0, 0)$; $D\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$.			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre las expresiones cartesiana y polar de ecuaciones de lugares geométricos en el plano, tales como rectas y circunferencias.			
Ejemplo	**9.** Escribe la ecuación implícita en coordenadas polares de: **a)** La recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $(-1, -1)$. **b)** La circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 0)$; $B(-2, 0)$ y $C(0, -2)$.			

Actividad tipo	■ Ejercicio	□ Problema	□ Cuestión	□ Situación
Descripción	Relación entre las coordenadas esféricas, cilíndricas y cartesianas de un punto del espacio tridimensional, mediante el empleo de las razones trigonométricas principales.			
Ejemplo	**22.** Pasa a coordenadas cartesianas los siguientes puntos determinados por sus coordenadas cilíndricas y esféricas: **a)** $A(r, \theta, z) = \left(3, \frac{2\pi}{3}, 3\right)$; $B(r, \theta, z) = (4, \pi, -4)$ **b)** $A(r, \alpha, \beta) = (3, \pi, 0)$; $B(r, \alpha, \beta) = \left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$			

En 2º de Bachillerato, la trigonometría se utiliza como apoyo en demostraciones y en la resolución de ciertos ejercicios (en los que interviene como parte de una fórmula).

Los contenidos más extensos giran en torno a la geometría analítica. Ejemplos de ello son el uso de productos escalares y vectoriales de vectores, el cálculo de los ángulos que forman entre sí distintos elementos que se cortan en el espacio, tales como planos, rectas y vectores, o la expresión en coordenadas polares de algunos elementos situados en el plano y en el espacio.

Por otra parte, se observa una ausencia de cuestiones en ambos cursos de Bachillerato, y una ausencia de problemas en 2º de Bachillerato.

Capítulo 5. Resultados.

En este capítulo se realiza una síntesis de las conclusiones extraídas a partir del análisis conjunto del currículo y de las principales actividades sobre trigonometría presentes en los libros de texto.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.

Como se ha podido observar en los capítulos 1, 2 y 3, la trigonometría aparece por primera vez en 4º de ESO y continúa su profundización en 1º de Bachillerato. Previamente, se introducen algunos contenidos geométricos que ayudarán al estudio de la misma. Entre los más reseñables, se encuentran las medidas en ángulos sexagesimales y sus operaciones, los elementos y ángulos de distintos triángulos, el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales. Posteriormente, en 2º de Bachillerato, la trigonometría pasa a ser un elemento auxiliar para el estudio de la geometría analítica, formalizando su estudio y llevando a cabo una algebrización para la resolución de problemas.

Para el análisis de ausencias y presencias descrito a continuación, hemos utilizado como libro de referencia el texto *Trigonometry*, de I.M. Gelfand y M. Saul. Se ha observado que los conceptos trigonométricos de dicho libro son contemplados por el currículo, en particular:

- razones trigonométricas en un triángulo;
- relación entre razones trigonométricas:
- relaciones en un triángulo;
- funciones trigonométricas para cualquier ángulo;
- el radian como medida angular;
- fórmulas de la suma (y de la resta) de las razones trigonométricas de dos ángulos;
- identidades trigonométricas;
- fórmulas de las razones trigonométricas de los ángulos doble y mitad;
- transformación de sumas de razones trigonométricas en producto;
- gráficas de las funciones trigonométricas;
- funciones inversas a las trigonométricas;
- ecuaciones trigonométricas.

Uno de los conceptos trigonométricos que se desarrolla en mayor profundidad en el texto *Trigonometry*, es el estudio de las razones trigonométricas en círculos mediante triángulos rectángulos inscritos en los mismos. En cualquier caso, la conclusión general que puede extraerse del análisis de dicho texto, es no debería presentar problemas en su lectura para alguien que haya cursado Educación Secundaria y la modalidad de Ciencias en Bachiller.

Por su parte, el currículo explicita el uso de un razonamiento deductivo y un nivel dde formalismo y abstracción para hallar la solución de un determinado problema e insiste en el uso de software y tecnologías que permitan al estudiante entender mejor determinados problemas geométricos. Asimismo, el currículo introduce el estudio de las funciones trigonométricas dentro del bloque de 'Análisis' en 1º de Bachillerato, lo cual es posible gracias al estudio de las razones trigonométricas que se ha realizado previamente en 4º de ESO. Sin embargo, en el currículo no se hace referencia a la importante relación que tiene la trigonometría con otras disciplinas, tales como la física.

En lo que respecta a los libros de texto, como conclusión general, el estudio de la trigonometría se realiza fundamentalmente a través de ejercicios de aplicación de los contenidos teóricos, en los cuales se trabaja especialmente:

- la definición y aplicación de razones trigonométricas en triángulos rectángulos;
- la aplicación de razones trigonométricas en distintos cuadrantes y para cualquier ángulo;
- la aplicación de las fórmulas de las razones trigonométricas para la suma (y resta) de dos ángulos y para las razones trigonométricas de los ángulos doble y mitad;
- el uso de los teoremas del seno y el coseno para resolver elementos de triángulos cualesquiera;
- la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas;
- la comprobación o simplificación de identidades y expresiones trigonométricas, empleando relaciones más sencillas entre razones trigonométricas.

Por otro lado, en la mayoría de los problemas se plantea la resolución de triángulos, tanto rectángulos como no rectángulos, mediante las razones y relaciones trigonométricas correspondientes. Por último, también se incluyen algunas cuestiones, aunque en menor medida que las actividades anteriores, encaminadas a introducir contenidos tratados posteriormente, o bien a sintetizar varios conceptos vistos a lo largo de la unidad didáctica.

Las ausencias más notables en los tipos de actividad incluidas en los libros de texto son las situaciones. Por otra parte, este tipo de actividad no tiene tanto sentido que sea incluida en libros de Bachillerato, pero sí en libros de ESO (sobre todo en los primeros cursos). Por último, al igual que ocurría en el caso del currículo, no hay relación de la trigonometría con otras disciplinas como la física.

Adicionalmente cabe destacar que tampoco se observan actividades encaminadas a tratar con TICs y software dinámico.

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

Los libros de texto se estructuran del mismo modo que el currículo, siguiendo un desarrollo en espiral, repasando y profundizando en conceptos previos para luego introducir otros nuevos.

En lo que respecta a los contenidos en trigonometría, los libros de texto cumplen perfectamente la normativa del currículo, e incluso los amplían en ocasiones, como en el caso del estudio de poliedros semirregulares o arquimedianos en 2º de ESO. Además, los ejercicios y problemas son abundantes y facilitan la práctica de tales contenidos, repartidos en distintos niveles de dificultad.

Por otro lado, los libros de texto no incluyen actividades en las que se haga uso de software dinámico para interpretar la geometría, siendo éste uno de los contenidos que aparecen en el currículo.

Los criterios de evaluación son muy coherentes entre ambas partes. El curso en el que se introduce la trigonometría y supone un antes y un después en el estudio de la misma es 4º de ESO. Por este motivo, comenzamos analizando dicho curso y los de Bachillerato, para finalizar con los cursos de 1º, 2º y 3º de ESO. En 4º de ESO, los criterios de evaluación sobre trigonometría se centran sobre todo en entender las razones trigonométricas, su aplicación, y sus relaciones, así como en manejar correctamente las unidades de medida angulares. Los ejercicios y problemas del libro de texto ponen en práctica tales criterios de evaluación. En Bachillerato, los criterios de evaluación van encaminados al dominio de los conceptos trigonométricos y su interpretación geométrica. Hay numerosos y variados ejercicios y problemas en los libros de texto que ponen en práctica tales criterios de evaluación.

Por último, analizamos la coherencia de los criterios de evaluación y los libros de texto en los cursos de 1º, 2º y 3º de ESO, en los que no hay trigonometría. Los criterios de evaluación del bloque de Geometría también se ponen en práctica con los distintos ejercicios y problemas del libro de texto, si bien hay uno de ellos en el que no se pone tanto énfasis como el resto, que es el siguiente:

Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.

Los ejercicios y problemas más frecuentes son de aplicación de la fórmula del teorema de Pitágoras, no así de su significado geométrico.

Los estándares de aprendizaje evaluables también quedan reflejados fielmente mediante el tipo de actividades presentes en los libros de texto.

En conclusión, los libros de texto empleados son coherentes con la normativa vigente del currículo, salvo en los aspectos referidos al uso de TICs y software dinámico.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la trigonometría en un grupo de 4º de ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster, se analiza un proceso de estudio llevado a cabo con un grupo de alumnos de 4º de ESO sobre contenidos de trigonometría.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se analiza el libro de texto de referencia utilizado en este proyecto. En el segundo capítulo, se estudian las dificultades y errores previstos que pueden surgir en el alumnado en relación con este tema. En el tercero, se establece un proceso de estudio de dicho tema: la distribución de los tiempos en clase y las actividades y tareas a proponer a los alumnos. En el último capítulo, se detalla la puesta en práctica del proceso, utilizando como metodología de investigación la ingeniería didáctica.

En una última parte de este estudio, se exponen unas síntesis y conclusiones de todo este análisis entre lo esperado (análisis a priori) y los resultados obtenidos y contrastados tras la experimentación (análisis a posteriori).

Capítulo 6. La trigonometría en el libro de texto de referencia.

El libro utilizado para el curso de 4º de ESO en el que se lleva a cabo el presente proyecto es el libro de la editorial SM-Savia de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Los contenidos y su estructuración presentan una organización basada en lo establecido por la LOMCE en el currículo.

El presente capítulo se centra en el Tema 5 del mencionado libro. El análisis de la unidad didáctica se basa en el artículo publicado en 2006 por Godino, Font y Wilhelmi, donde se analiza el enfoque ontosemiótico de una lección de 5º de Educación Primaria sobre la suma y la resta.

6.1 Objetos matemáticos involucrados.

Es importante analizar el libro de texto con el fin de comprobar la idoneidad del mismo, puesto que es uno de los elementos clave en el proceso de aprendizaje llevado a cabo por el alumnado. Así, se puede distinguir entre varios tipos de idoneidad:

- Idoneidad epistémica (significados institucionales implementados o pretendidos respecto a significados de referencia).
- Idoneidad cognitiva (proximidad de los significados pretendidos respecto a los personales iniciales de los estudiantes).
- Idoneidad semiótica (aquellos significados enseñados acaban siendo comunes para el alumnado, atendiendo a procesos de negociación de significados).
- Idoneidad mediacional (adecuación de recursos materiales y temporales para el proceso de estudio).
- Idoneidad emocional (interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio).

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (significado pretendido) es necesario establecer el significado de referencia que sirva como comparación. Para ello, se agrupan los distintos elementos del significado de referencia para las razones y relaciones trigonométricas en los seis tipos de entidades que propone el enfoque onto-semiótico: el lenguaje utilizado (verbal, gráfico y simbólico), las situaciones o problemas planteados, los conceptos previos y emergentes relacionados con el tema, los procedimientos o acciones realizadas, las propiedades y los argumentos o razonamientos de las mismas. Éstas se organizan en la Tabla 15 para la unidad didáctica objeto de estudio.

Lenguaje
Verbal
Figuras geométricas, lados homólogos, proporcionales, semejantes, razón de semejanza, teorema de Tales, posición de Tales, criterios de semejanza, teoremas de la altura y del cateto, ángulos iguales, hipotenusa, catetos, opuesto, contiguo, proyección, grados sexagesimal, radián, circunferencia goniométrica, radio, razones trigonométricas, triángulo rectángulo, isósceles, identidades trigonométricas, ecuación trigonométrica, vueltas completas, arco seno, arco coseno, arco tangente, teorema de Pitágoras.

<table>
<tr><td colspan="2">Gráfico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementos de un triángulo rectángulo, ángulos, proyecciones de catetos sobre la hipotenusa, triángulos semejantes, circunferencias, circunferencia goniométrica, razones trigonométicas, cuadrantes, ilustraciones en problemas de resolución de triángulos rectángulos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Simbólico</td></tr>
<tr><td colspan="2">a, b, c, $a^2 + b^2 = c^2$, sen α, cos α, tg α, arcsen α, arccos α, arctg α, $\hat{A}$, m, cm, n, h A,B,C, x, y, cosec α, sec α, cotg α, π, rad, º, AB, BC, r, sen $\hat{A}$, ±, =, >,<, k, k^2, k^3, k, β, γ, δ.</td></tr>
<tr><td>Situaciones</td><td>Conceptos</td></tr>
<tr><td>Problemas y ejercicios descontextualizados sobre: teorema de Tales, Semejanza y proporcionalidad de lados, áreas y volúmenes de figuras geométricas, teorema de la altura, y los catetos, teorema de Pitágoras, razones y relaciones trigonométricas, relación entre ángulos de distintos cuadrantes, nº de vueltas completas, razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º, comprobación o simplificación de expresiones complejas, resolución de ecuaciones trigonométricas, utilización de la calculadora para obtener el valor de un ángulo (funciones arco) y de razones trigonométricas.

Problemas contextualizados sobre: resolución de triángulos rectángulos y elementos de los mismos, teorema de Tales, teorema de Pitágoras.</td><td>Previos: teorema de Tales, teorema de Pitágoras, semejanza y proporcionalidad de lados, áreas y volúmenes de figuras geométricas, criterios de semejanza de triángulos, medida de ángulos en grados sexagesimales, suma de los ángulos de un triángulo.

Emergentes: teoremas de la altura y el cateto, definición de radian, conversión entre grados sexagesimales y radianes, definición y cálculo de razones trigonométricas de un ángulo agudo y un ángulo cualquiera (según el cuadrante en el que se encuentre y el nº de vueltas completas) bien mediante calculadora o mediante relaciones, resolución de triángulos rectángulos, identidades y ecuaciones trigonométricas, funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente.</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td>Propiedades</td></tr>
<tr><td>Descontextualización de problemas de resolución de triángulos rectángulos, contextualización de problemas sobre cálculo de elementos en triángulos rectángulos, aplicación del teorema de Tales y razones de semejanza para hallar lados, áreas y volúmenes de figuras semejantes, cálculo de lados/proyecciones de triángulos mediante el método más rápido/adecuado, recordatorio de la nomenclatura de los elementos de un triángulo, definición de razones trigonométricas y aplicación a ejemplos concretos, relación entre ángulos de distintos cuadrantes, interpretación de las razones trigonométricas como elementos de medidas y relación de ángulos y longitudes.</td><td>- Los triángulos en posición de Tales son semejantes.
- La suma de los 3 ángulos de un triángulo es 180º.
- Si un triángulo es rectángulo, los otros dos ángulos son complementarios entre sí.
- Los valores del seno y del coseno ara cualquier ángulo se encuentran acotados entre -1 y 1, no así la tangente.
- Las razones trigonométricas de un ángulo mayor de 360º son equivalentes a las razones trigonométricas de otro ángulo entre 0º y 360º.
- Las relaciones entre ciertos ángulos de distintos cuadrantes: ángulos complementarios, suplementarios, que suman 360º y difieren en 180º.</td></tr>
</table>

	- La ecuación fundamental de la trigonometría y otras identidades trigonométricas. - Las infinitas soluciones de las ecuaciones trigonométricas.
Argumentos	
Comprobación de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en los distintos cuadrantes, para los casos concretos de 30º, 45º, 60º, 0º (360º), 90º, 180º y 270º y para las relaciones entre ciertos ángulos de distintos cuadrantes (ángulos complementarios, suplementarios, que suman 360º y que difieren en 180º) mediante la representación de los mismos en la circunferencia goniométrica. Comprobación de las infinitas soluciones de ecuaciones trigonométricas no acotadas en ningún intervalo.	

Tabla 15. Configuración epistémica 'empírica' de la trigonometría.

6.2. Análisis global de la unidad didáctica.

La unidad didáctica a analizar en el libro de texto de referencia es la Unidad 5 (Semejanza y trigonometría), cuya estructuración viene descrita a continuación.

El tema comienza con una portada como la que se muestra en la Figura 1. Ésta contiene una lectura introductoria relacionada con el tema que se va a tratar en la unidad didáctica, ubicada en el centro de la página. Dicha lectura presenta fragmentos de un texto de un determinado autor, en los que se relatan anécdotas, historias o curiosidades motivantes para el alumnado, con la finalidad de propiciar una mayor predisposición al estudio de la unidad didáctica por su parte. Para ello, se presentan conocimientos matemáticos en un contexto no matemático. La portada también contiene una serie de preguntas o reflexiones para que se haga el alumnado previamente al estudio de la unidad didáctica.

En las siguientes páginas se encuentra el cuerpo de la unidad didáctica con los distintos apartados en que se encuentra dividida la misma. En concreto, los apartados son:

- Figuras semejantes. Teoremas de Tales.
- Criterios de semejanza de triángulos. Consecuencias.
- Medida de ángulos: Aplicación de la semejanza.
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
- Identidades trigonométricas.
- Ecuaciones trigonométricas.

Todos estos apartados comparten una estructura similar en la que se encuentran elementos comunes. En todos ellos hay un título que indica los contenidos que se van a trabajar en el apartado en cuestión (ver Figura 2). Muchos de ellos también presentan cuadros en los márgenes de libro con cuestiones o curiosidades sobre el contenido trabajado, denominados *Sabías que…*. También hay otros cuadros en los márgenes con aclaraciones o puntualizaciones sobre los contenidos matemáticos tratados en la correspondiente página, denominados *¡Ten en cuenta*. Ambos tipos de cuadros se muestran en la Figura 3.

Figura 1. Portada de la unidad didáctica.

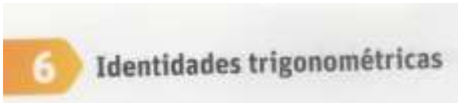


Figura 2. Título de un apartado.

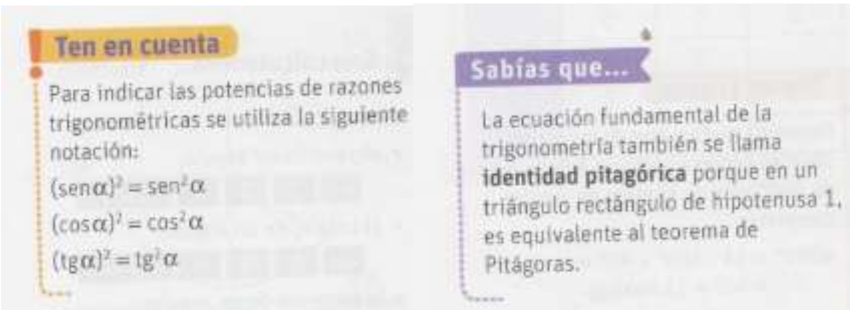


Figura 3. Anotaciones en los márgenes del libro.

Otros elementos comunes en la mayoría de los apartados de la unidad didáctica son unos rectángulos amarillos que contienen información importante y sintetizada (ver Figura 4). La información que se encuentra en este apartado son definiciones, enunciados sencillos o expresiones matemáticas simples en las que se basa el apartado en cuestión. A su vez, dentro de éstos recuadros también hay remarcadas en negrita palabras o símbolos matemáticos importantes. De esta manera, se consigue un efecto visual para que los estudiantes centren su atención en los puntos clave a la hora de estudiar el tema.

Asimismo, dentro de éstos apartados también se encuentran ejemplos de ejercicios resueltos en los que interviene la aplicación de los conceptos tratados en los mismos (ver Figura 5). De esta manera, se pretende aclarar dichos conceptos, a la vez que sirve como guía al alumnado previamente a la realización de las actividades del libro de texto.

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo α verifican las siguientes ide-
dades trigonométricas.

- $\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$, llamada ecuación fundamental de la trigonometría.
- $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha} = sec^2\alpha$
- $1 + cotg^2\alpha = \dfrac{1}{sen^2\alpha} = cosec^2\alpha$

Figura 4. Recuadro amarillo con contenido importante.

Ejemplos

- Calcula las razones trigonométricas del ángulo α si $sen\alpha = \dfrac{1}{4}$, donde $0 < \alpha < 90°$.

Se utiliza la primera relación:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Al ser el ángulo del primer cuadrante, el coseno es positivo, $cos\alpha = +\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Por tanto, la tangente es: $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{15}}{\cancel{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

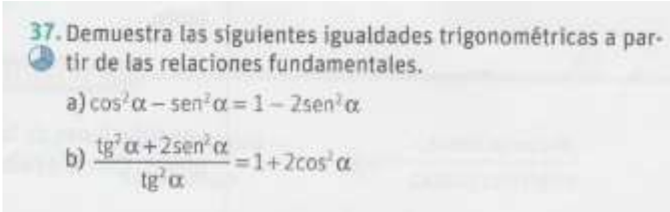
El resto de las razones son: $cosec\alpha = 4$, $sec\alpha = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$ y $cotg\alpha = \sqrt{15}$

Figura 5. Ejemplo de resolución de un ejercicio.

En los distintos apartados también se encuentran actividades cuyo objetivo es poner en práctica los conocimientos desarrollados en los mismos (ver Figura 6). En este sentido, las actividades pueden ser clasificadas como cuestiones, ejercicios, problemas o situaciones, según se ha descrito anteriormente en el Capítulo 4. No obstante, la mayoría de dichas actividades son ejercicios de aplicación directa de los conocimientos introducidos en el apartado.

Otro aspecto reseñable de las actividades propuestas por el libro de texto es el nivel de dificultad de las mismas. Este nivel de dificultad se señaliza mediante un diagrama de sectores compuesto por tres sectores de igual amplitud, de tal manera que el nivel de dificultad se asocia al número de sectores sombreados en el mismo. De este modo, las actividades se definen con los niveles de dificultad 1, 2 ó 3 según nos encontremos haya uno, dos o tres sectores sombreados respectivamente. Este diagrama se ubica a la izquierda del enunciado de la actividad y debajo del número que indica la numeración de la misma. Posteriormente, en la Tabla 16, se realiza una síntesis con los tipos de actividades presentes en la unidad didáctica organizadas en función de su dificultad.

Algunas actividades del libro de texto se encuentran resueltas para que sirvan como referencia al alumnado en la resolución de actividades similares propuestas por el mismo (ver Figura 7). Generalmente, la resolución de estas actividades es más compleja, no siendo tan evidentes los pasos a seguir en la misma.

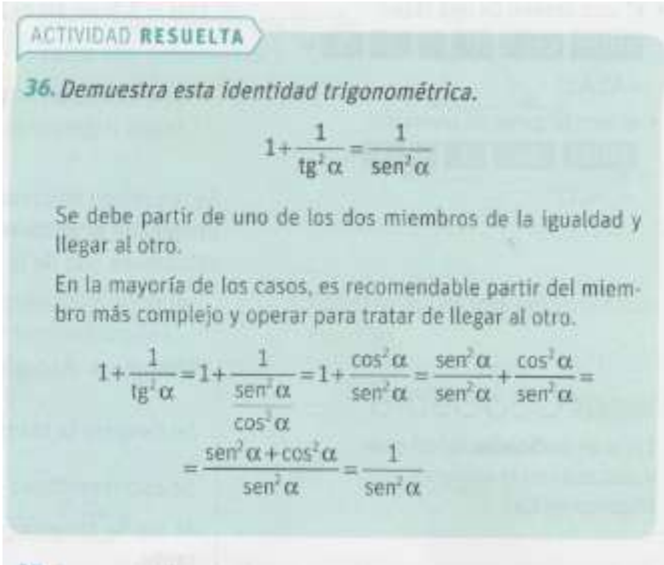


37. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las relaciones fundamentales.

a) $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$

b) $\dfrac{\text{tg}^2\alpha + 2\text{sen}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha} = 1 + 2\cos^2\alpha$

Figura 6. Actividad propuesta por el libro de texto.



ACTIVIDAD **RESUELTA**

36. *Demuestra esta identidad trigonométrica.*

$$1 + \frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

Se debe partir de uno de los dos miembros de la igualdad y llegar al otro.

En la mayoría de los casos, es recomendable partir del miembro más complejo y operar para tratar de llegar al otro.

$$1 + \frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

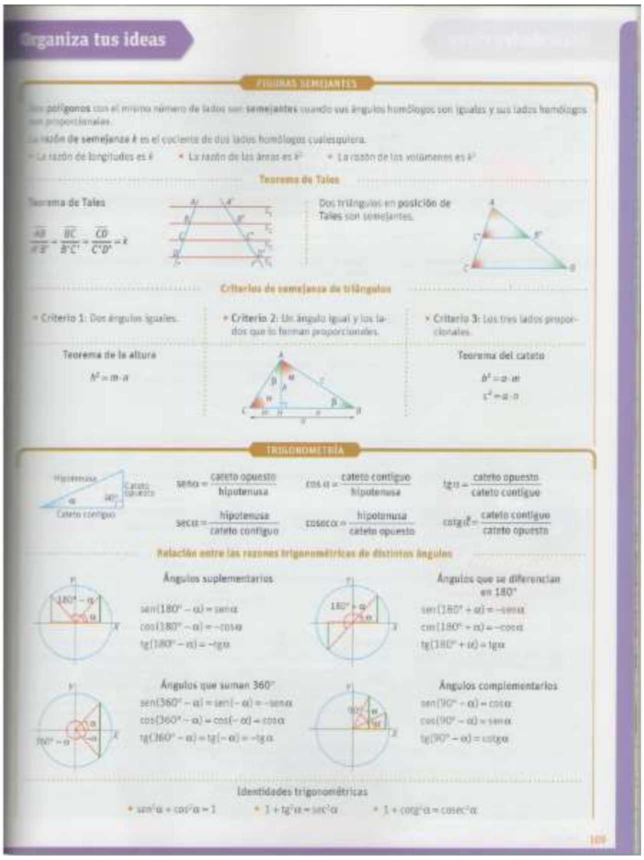
Figura 7. Actividad resuelta en el libro de texto.

Todos estos elementos descritos en las Figuras 1 - 7 forman parte de los distintos apartados que constituyen el cuerpo de la unidad didáctica. Tras el último de dichos apartados se encuentra una sección denominada *Organiza tus ideas* (ver Figura 8). En ella viene un resumen con los conceptos más importantes de la unidad didáctica, organizados de forma esquemática por contenidos.

A continuación se encuentra otra sección denominada *Actividades clave* (ver Figura 9), en la que se presentan resueltos una serie de ejercicios y problemas representativos de la unidad didáctica. Estas actividades presentan una complejidad mayor que las actividades de los apartados anteriores.

Tras la sección anterior se encuentra la penúltima de ellas denominada *Actividades* (ver Figura 10). En las páginas de esta sección hay actividades similares tanto a aquéllas presentes en los distintos apartados del tema, como a las mencionadas en la sección de *Actividades clave*, agrupadas todas ellas por contenidos. En esta sección también hay algunas actividades resueltas como las descritas anteriormente en la Figura 7. Todo esto hace que el alumnado disponga de un repertorio amplio de actividades con las que practicar los distintos contenidos de la unidad didáctica.

La última sección se denomina *Ponte a prueba* (ver Figura 11). En ella se encuentran problemas y cuestiones de carácter más reflexivo y de profundización, que sirven de ampliación de los contenidos presentes en la unidad didáctica. También hay un cuadro denominado *Autoevaluación* con ejercicios y cuestiones a modo de síntesis y repaso de todos los contenidos de la misma.



Organiza tus ideas

FIGURAS SEMEJANTES

Teorema de Tales

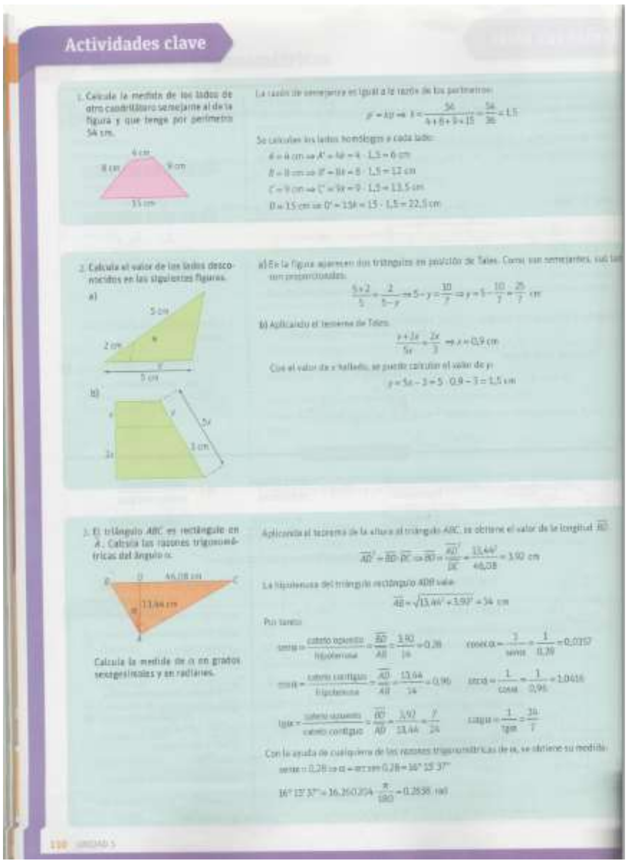
Criterios de semejanza de triángulos

TRIGONOMETRÍA

Relación entre las razones trigonométricas de distintos ángulos

Identidades trigonométricas

Figura 8. Sección *Organiza tus ideas*.



Actividades clave

Figura 9. Página de la sección *Actividades clave*.

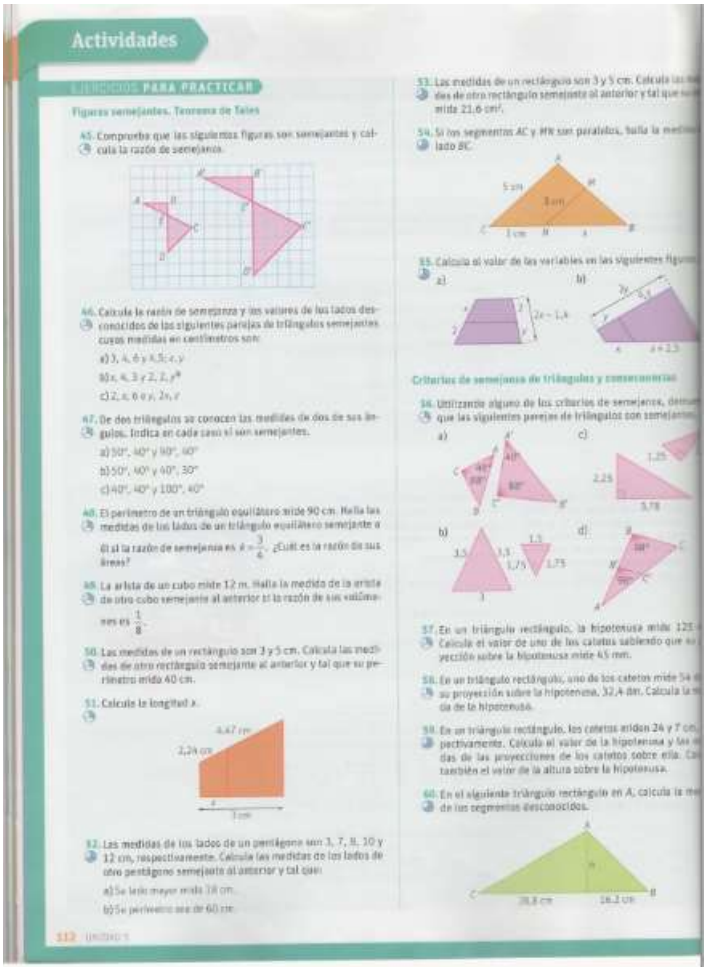


Figura 10. Página de la sección *Actividades finales.*

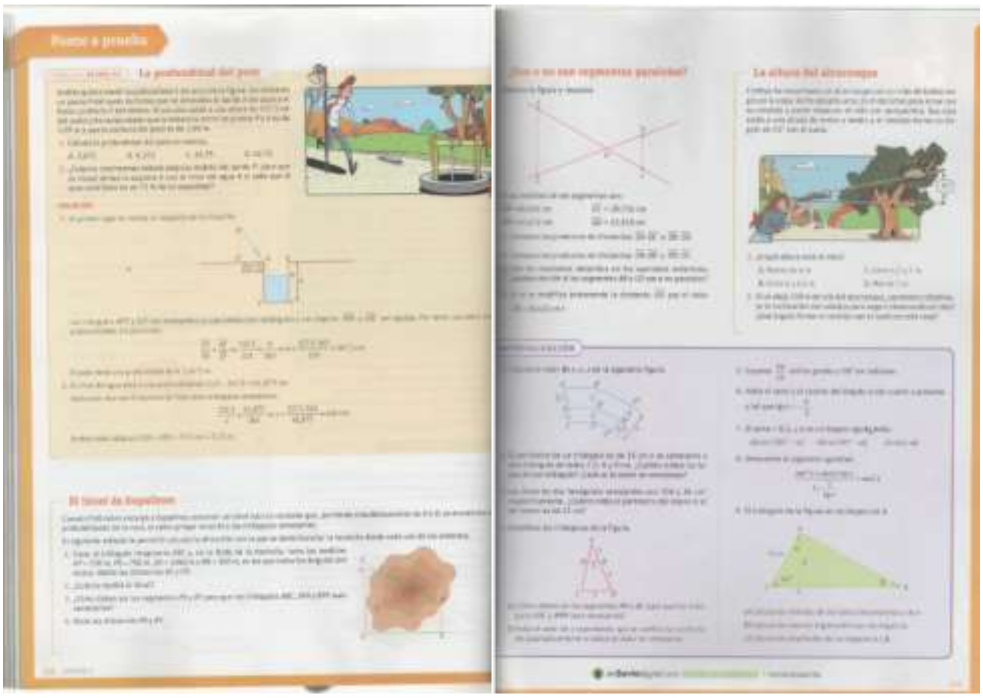


Figura 11. Sección *Ponte a prueba.*

Tipo de actividad	Nº total en la unidad didáctica	Dificultad			Páginas finales	% Respecto al total
		*	**	***		
Ejercicios	84	43	32	1	8	**77**
Cuestiones	7	2	2	2	1	**6,5**
Problemas	18	4	7	3	4	**16,5**
	Nº total (niveles de dificultad)	49	41	6		
	% niveles dificultad	**51**	**43**	**6**		

Tabla 16. Tipo de actividades y nivel de dificultad en el libro de texto. La notación (*,**,***) denota un nivel de dificultad creciente.

La Tabla 16 muestra los distintos tipos de actividades y su nivel de dificultad en la unidad 5. El tipo de actividad que se repite con más frecuencia son los ejercicios, seguidos de problemas y por último cuestiones. Los niveles de dificultad más presentes a su vez corresponden al nivel 1 y 2, siendo escaso el porcentaje relativo al nivel 3.

Se trabajan los siguientes aspectos contemplados por el currículo:

- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.
- Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

En esta unidad se aúna el estudio de la semejanza y la trigonometría sin una coherencia de cara al aprendizaje del alumnado, ya que aparecen dos tipos de entidades matemáticas distintas sin relación aparente entre ellas. Como posible punto de mejora, el/la docente podría justificar el porqué de la representación de las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica. En concreto, se podría comprobar mediante la semejanza de triángulos y el teorema de Tales, como las razones trigonométricas son exactamente iguales en cuanto a valor numérico independientemente del radio de circunferencia escogido.

Capítulo 7. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica.

Tras realizar un análisis de la unidad didáctica del libro de texto, en este capítulo se estudian las dificultades y errores previsibles en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la relaciones de semejanza y la trigonometría en los dos grupos de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO.

Este estudio permitirá realizar una primera aproximación del ejercicio docente en la presente unidad didáctica. No obstante, se prestará atención al *feedback* ofrecido por el alumnado con el fin de corroborar el correcto desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Cabe mencionar que se ha tenido ocasión de asistir a varias sesiones de la asignatura en ambos grupos de 4º de ESO en las que la docente a cargo ha comenzado la impartición de los contenidos de la unidad didáctica. Esto ha permitido observar varias dificultades y errores cometidos frecuentemente por el alumnado en dichos contenidos.

7.1. Dificultades.

A la hora de establecer las dificultades, hay que tener en cuenta que ésta es la primera vez que se introduce la trigonometría en Educación Secundaria, con lo que supone la introducción de nuevos contenidos para el alumnado.

Por un lado, se prevé que la mayor dificultad esté relacionada precisamente con el hecho de introducir una rama de estudio totalmente nueva. En este caso, la dificultad reside en la faceta epistémica, derivada de la dificultad de la actividad matemática en sí misma y los contenidos matemáticos emergentes pretendidos.

Por otra parte, se debe tener en consideración que algunos estudiantes tendrán más dificultades que otros en cuanto a visión espacial. Por tanto, esta parte del alumnado tendrá una dificultad añadida a la anterior.

Otra de las dificultades que puede presentarse es la relativa al trabajo y estudio personal del alumnado. Si no se practican mediante trabajo autónomo los contenidos vistos en clase, los estudiantes tendrán más dificultades conforme se avance en el tema y se aumente progresivamente la cantidad de contenidos impartidos.

También puede suponer una dificultad añadida el hecho de que prácticamente la totalidad de actividades sean ejercicios descontextualizados de aplicación directa de los contenidos teóricos, con una baja idoneidad afectiva para el alumnado. Esto puede redundar en una menor motivación a la hora de tener que estudiar y trabajar con las actividades. Por otro lado, las necesidades de motivación a la hora de trabajar con las matemáticas son bastante menores que en cursos de 1º o 2º de ESO, en los que la idoneidad afectiva puede tener mayor impacto a la hora de realizar tareas o estudiar un determinado tema.

En las últimas sesiones de clase, en las que el alumnado trabaja de forma autónoma en la resolución de un ejercicio del libro de texto, se observan dos dificultades recurrentes. Por un lado, el manejo de las identidades trigonométricas; por otro, la dificultad para relacionar correctamente ciertos ángulos en el mismo o en distintos cuadrantes.

Asimismo, se han observado otra serie de dificultades durante las sesiones impartidas por la docente:

- Rechazar la existencia de infinitos ángulos que tienen las mismas razones trigonométricas que cierto ángulo comprendido entre 0º y 360º. Esta dificultad puede tener su origen en un conflicto semiótico por parte del alumnado, ya que razones trigonométricas de ciertos números distintos son iguales en valor numérico.
- Diferenciar entre ecuación e identidad.
- Trabajar con radianes en la calculadora, teniendo que cambiar el modo de trabajo de la misma.

7.2. Errores y su posible origen.

En primer lugar se comentan los errores más frecuentes observados durante las sesiones llevadas a cabo por la docente titular:

- Errores al realizar la conversión entre grados sexagesimales y radianes. Son errores de origen epistemológico, al introducir el concepto de radián como unidad de medida angular, y operacional, al involucrar el empleo de fracciones. Los errores cometidos al simplificar expresiones mediante la racionalización poseen también un origen operacional.
- Errores en el razonamiento de cuestiones en las que intervienen las palabras siempre o nunca. Son errores de origen cognitivo, al tener que buscar justificaciones matemáticas para dichos matices.
- Errores de origen epistemológico debidos a la introducción de conocimientos matemáticos nuevos, tales como: relacionar ángulos y razones trigonométricas en distintos cuadrantes; asociar un ángulo negativo con su correspondiente positivo; demostrar y comprobar ciertas expresiones e igualdades trigonométricas; definir razones trigonométricas inversas.

Éstos son más frecuentes en las primeras sesiones, aunque siguen perdurando en mayor o menor medida a lo largo del curso. Adicionalmente, se observan errores debidos a la aplicación incorrecta de razones de semejanza entre figuras geométricas, aplicando razones de ampliación cuando hay que aplicar de reducción y viceversa.

Los errores previstos en los contenidos que forman parte de la docencia autónoma desarrollada por el autor son los siguientes:

- Errores basados en entender que x y α en las expresiones sen x y sen α, tienen el mismo significado a la hora de resolver una ecuación trigonométrica. Este error puede tener un origen en la faceta interaccional-mediacional con las matemáticas, al trabajar habitualmente empleando la notación α (u otra letra griega) para designar los ángulos de las razones trigonométricas.
- Errores al tener que escribir $\alpha+360º k$ (donde k pertenece al conjunto de números enteros) como parte de la solución de las ecuaciones trigonométricas, expresando las infinitas soluciones existentes. Su origen es epistemológico al introducirse notación de cierto rigor matemático. Este error se repite por parte del alumnado al realizar ejercicios de ecuaciones trigonométricas más complejas.
- Errores debidos a hallar incorrectamente o no tener en cuenta la segunda solución de las ecuaciones trigonométricas (cuando la solución no es uno de los ángulos situados sobre los ejes de la circunferencia goniométrica). Este error es

todavía más notable cuando la primera solución no es un ángulo del primer cuadrante, con el que el alumnado establece más fácilmente relaciones con otros ángulos.

- Errores observados por la incorrecta utilización de las funciones trigonométricas o sus recíprocas en la calculadora.
- Errores debidos al desconocimiento del valor de las razones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º y 60º, así como de las definiciones de las relaciones trigonométricas.

Capítulo 8. El proceso de estudio.

Tras realizar el estudio sobre las dificultades y errores esperados, en este capítulo se expone la distribución del tiempo de clase, las actividades adicionales planificadas y el trabajo autónomo del alumnado en los dos grupos de 4º de ESO.

8.1. Distribución del tiempo de clase.

Salvo las clases dedicadas exclusivamente a realizar ejercicios y corregir la tarea con el fin de practicar para el examen, todas las sesiones siguen una estructura similar, que aparece detallada a continuación.

En primer lugar, se corrige la tarea propuesta el día anterior atendiendo las dudas y dificultades que hayan surgido. El tiempo dedicado a esta actividad suele oscilar entre 10 y 15 minutos, en función de la cantidad de ejercicios pero, sobre todo, de las dudas y dificultades planteadas por el alumnado.

En una segunda parte, se explican magistralmente los nuevos contenidos matemáticos y se deja tiempo al alumnado para que copie en su cuaderno la explicación. En total, el proceso dura aproximadamente entre 20 y 35 minutos. Si la explicación es algo más larga, ésta se subdivide en partes más pequeñas, de forma que se intercalan las explicaciones magistrales y las anotaciones en el cuaderno; de esta manera, se consigue mantener la atención del alumnado.

La última parte de la sesión tiene un carácter más práctico para los estudiantes. Tras plantear sus dudas sobre lo explicado, en caso de que las haya, pasan a realizar ejercicios, la mayoría de las veces de forma individual y ocasionalmente por parejas. Los ejercicios que no llegan a finalizar quedan como tarea para casa.

A continuación, se comentan brevemente los contenidos trabajados a lo largo de las sesiones hasta la realización del examen de la unidad didáctica correspondiente:

Sesión 0: Se realiza el examen de la unidad didáctica anterior.

Sesión1: Los alumnos revisan individualmente el examen del día anterior corregido. Se trabajan de forma individual los contenidos relativos a figuras semejantes, teorema de Tales y criterios de semejanza de triángulos. Se anotan ejemplos y se realizan actividades propuestas por el libro de texto en el cuaderno.

Sesión 2: Se repasan los contenidos de la sesión anterior por parte de la docente y se explican los teoremas de la altura y del cateto. Se realizan actividades del libro sobre estos puntos en el cuaderno.

Sesión 3: Se explican los conceptos de grado sexagesimal y radián, así como la relación entre ambas unidades. Se realizan actividades del libro sobre este tema y se corrigen los trabajados en las anteriores sesiones.

Sesión 4: Se explican las definiciones de las razones trigonométricas principales seno, coseno y tangente, y de sus inversas. Se realizan actividades del libro de texto relacionadas con las mismas y de contenidos anteriores de la unidad didáctica.

Sesión 5: Se explica la circunferencia goniométrica y se muestra la representación del seno y del coseno en la misma con el fin de estudiar los signos de las razones trigonométricas principales en los distintos cuadrantes. El alumnado utiliza compás y colores (que también se emplean en la pizarra) para distinguir entre la medida del seno (vertical) y la del coseno (horizontal). También se demuestra el valor de las razones trigonométricas de 45º y 30º y, a partir de éste último, las de 60º. A continuación, se sintetizan en una tabla y se enseña a construirla. Se propone como tarea que el alumnado repase estos conceptos y los interiorice bien en casa.

Sesión 6: La docente repasa lo explicado en la sesión 5 y se añade a la tabla de las razones trigonométricas las correspondientes a los ángulos de 0º (y 360º), 90º, 180º y 270º, justificando sus valores mediante su dibujo en la circunferencia goniométrica. Se explica también como hallar las razones trigonométricas de ángulos mayores a 360º mediante la división de los mismos por 360 y fijándose en el resto. Se propone como tarea la solución de algunos ejercicios del libro de texto para que los alumnos practiquen estos contenidos.

Sesión 7: Se demuestran las relaciones entre ángulos suplementarios y los que difieren en 180º, de nuevo apoyándonos en dibujos sobre la circunferencia goniométrica. Se propone al alumnado que resuelva tanto los ejercicios del libro de texto sobre el tema, como otros de temática similar proporcionados por la profesora.

Sesión 8: Se explican las relaciones de razones trigonométricas para ángulos complementarios y del primer y cuarto cuadrante. Se corrige la tarea en cuestión y se propone realizar ejercicios sobre el teorema de la altura y del cateto a modo de recordatorio.

Sesión 9: Se estudian las identidades trigonométricas con ejemplos de aplicación en ejercicios de demostración de relaciones entre razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. El alumnado copia actividades resueltas en el libro de texto, con las fórmulas y orientaciones dadas en pizarra. Finalmente, se les propone como tarea la solución de ejercicios de esta temática.

Sesión 10: Se corrigen y repasan las dudas de los ejercicios relativos a identidades trigonométricas. A lo largo de la sesión se realizan más ejercicios sobre las mismas y el alumnado sale a la pizarra a resolverlos cada cierto tiempo, de modo que puedan corregirse entre ellos. Se incide en este contenido ya que hay varios ejercicios sobre esta parte y la docente avisa que habrá una pregunta en el examen relativa a este tipo de ejercicios.

Sesión 11: Se explican las ecuaciones trigonométricas y cómo resolverlas mediante un ejemplo. A continuación, se corrige la tarea relativa a identidades trigonométricas y se proponen actividades para practicar dichas ecuaciones trigonométricas.

Sesión 12: Se repasa la tarea relativa a los ejercicios de ecuaciones trigonométricas, resolviendo las numerosas dudas sobre dicho tema, y se proponen ejercicios y problemas de aplicación de razones trigonométricas de determinados ángulos, con el fin de repasar las mismas.

Sesión 13: Se repasa rápidamente la tarea propuesta el día anterior de forma dictada, salvo uno de los problemas, que es resuelto por un estudiante en la pizarra. Posteriormente, se deja al alumnado trabajar de forma autónoma realizando actividades resueltas en el libro de texto que abarcan los distintos conceptos y nociones matemáticas vistas a lo largo del tema, a modo de repaso de las mismas. Se les pone música relajante de fondo para que trabajen mejor.

Sesión 14: Se repasa y se corrige la tarea propuesta el día anterior con énfasis en todas las dudas surgidas a los y las estudiantes, de cara a repasar los contenidos englobados en el examen de la semana siguiente. Se propone más tarea, que se corregirá en la siguiente sesión, con el fin de repasar las distintas actividades del tema de cara al próximo examen.

Sesión 15: De nuevo, se corrige rápidamente la tarea encomendada el día anterior, y se deja trabajar al alumnado de forma autónoma sobre más ejercicios de repaso del tema. Se les anima a que peguntan dudas relativas al examen que se realizará en la semana próxima.

Sesión 16: Se repasan y corrigen los ejercicios propuestos la semana anterior, relativos a identidades y ecuaciones trigonométricas, que son los que más dudas y errores plantean al alumnado.

Sesión 17: Se realiza el examen correspondiente a la unidad didáctica del Tema 5.

A continuación, en la Tabla 17 se presenta el tipo de docencia impartida a lo largo de las sesiones anteriormente descritas:

Sesión	**Tipo de actividad**	**Tiempo (min)**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
1	Repaso de tarea	55	Compartida	Mayéutica
	Realización de ejercicios		Alumnado	Constructivista
2	Explicación teórica	15	Docente	Magistral/mayéutica
	Realización de ejercicios, cuestión y problema	40	Compartida	Constructivista
3	Repaso de tarea	10	Compartida	Magistral/dialógica
	Explicación teórica	10	Docente	Magistral/mayéutica
	Realización de ejercicios	35	Alumnado	Magistral/constructivista
4	Repaso de tarea	10	Compartida	Magistral
	Explicación teórica	8	Docente	Magistral
	Realización de ejercicios, cuestión y problema	37	Alumnado	Constructivista
5	Repaso de tarea	15	Compartida	Magistral/dialógica
	Explicación teórica	40	Docente	Magistral/mayéutica
6	Repaso de tarea	10	Docente	Magistral/dialógica
	Explicación teórica	25	Docente	Magistral
	Realización de ejercicios	20	Alumnado	Constructivista

7	Explicación teórica	30	Docente	Magistral/dialógica
	Realización de ejercicios	25	Alumnado	Constructivista
8	Explicación teórica	15	Docente	Dialógica
	Corrección de tarea	15	Compartida	Magistral/mayéutica
	Realización de ejercicios	25	Alumnado	Constructivista
9	Corrección de tarea	7	Docente	Magistral/mayéutica
	Explicación teórica	5	Docente	Magistral
	Realización de ejercicios	43	Compartida	Constructivista
10	Corrección de tarea	20	Compartida	Mayéutica
	Realización de ejercicios	35	Alumnado	Constructivista
11	Explicación teórica	20	Docente	Mayéutica
	Corrección de tarea	35	Compartida	Magistral/Constructivista
12	Corrección de tarea	20	Compartida	Mayéutica
	Realización de ejercicios	35	Alumnado	Constructivista
13	Corrección de tarea	15	Compartida	Mayéutica
	Realización de ejercicios	40	Alumnado	Constructivista
14	Corrección de tarea	55	Compartida	Constructivista/dialógica
15	Corrección de tarea	7	Docente	Magistral
	Realización de ejercicios	48	Alumnado	Constructivista
16	Corrección de tarea	10	Compartida	Dialógica
	Resolución de dudas y cuestiones	45	Alumnado	Mayéutica
17	Examen del Tema 5	55 min	Alumnado	Constructivista

Tabla 17. Distribución del tiempo de clase.

Conviene notar que en el tiempo dedicado a la actividad referida como explicación teórica, se incluye el tiempo que el alumnado invierte en copiar en el cuaderno las explicaciones teóricas escritas en la pizarra por parte de la profesora, no sólo la explicación verbal y escrita de la misma. Por eso, en algunas de las sesiones los tiempos de explicación teórica magistral son más elevados, puesto que los conocimientos puestos en juego en las mismas requerían de dibujos claros precisos por parte de los estudiantes, como en el caso de la circunferencia goniométrica.

8.2. Actividades adicionales planificadas.

En la sesión del último día de la tercera semana de estancia en el centro, la profesora propone realizar como actividades adicionales algunos ejercicios de aplicación, cuestiones y problemas del tema. Para ello, se utiliza la plataforma digital con la que se trabaja en el centro. El alumnado puede enviar las actividades resueltas de forma online hasta el día anterior al examen, y éstas contarán positivamente para su calificación. Las actividades realizadas mediante este formato tienen como objetivo reforzar lo estudiado en el tema, ya que en el momento en el se propone dicha tarea, la unidad didáctica del Tema 5 ha sido impartida en su totalidad.

También se planteó la posibilidad de realizar una actividad cooperativa que al final no se pudo llevar a cabo por motivos de tiempo. Dicha actividad estaba asociada a los contenidos del Tema 6, que en principio iba a formar parte de mi docencia autónoma. Concretamente, se pensó en trabajar los teoremas del seno y del coseno para la resolución de triángulos cualesquiera. La clase se dividía en cuatro grupos en la primera sesión: dos de ellos estudiaban el teorema del seno, y otros dos el teorema del coseno, proponiendo ejercicios sobre los mismos que debían entregar al profesor al final de la hora. En la segunda sesión, se asignaba a cada grupo la resolución de un triángulo no rectángulo conociendo distintos datos de partida: dos ángulos y un lado; dos lados y el ángulo comprendido entre ellos; dos lados y un ángulo no comprendido; los tres lados. Lógicamente, la asignación tenía que tener en cuenta el teorema estudiado por los estudiantes de cada grupo. Durante dicha sesión, cada grupo estudiaba su caso y resolvía un ejercicio que entregaba al final de la hora. Además, se les entregaba la tarea de la sesión anterior corregida y se resolvían las dudas que pudiera haber. En la tercera sesión, se entregaba el ejercicio propuesto en la sesión anterior corregido a cada grupo, de tal manera que se revisaran y aclararan las dudas que pudiera haber por parte de los estudiantes. Finalmente, cada grupo exponía en la pizarra su ejercicio frente al resto, explicando el teorema empleado y los pasos en su resolución. De este modo, son los propios estudiantes quienes se preguntan y resuelven entre ellos las dudas. Las exposiciones se realizarían durante la tercera y cuarta sesión. Por último, en la quinta y última sesión, se les entregaba dos ejercicios a cada grupo para resolver dos triángulos distintos mediante alguno de los métodos explicados por los otros grupos. La corrección y resolución de estos ejercicios se realizaría por parte del docente en la pizarra, a modo de compendio de los conocimientos introducidos.

8.3. Tarea: actividad autónoma del alumnado prevista.

Prácticamente todos los ejercicios recogidos en el libro de texto se han propuesto como tarea a realizar por el alumnado, una parte de ellos se realizaba en clase y la otra se terminaba en casa. De este modo, la mayor o menor cantidad de tarea a realizar por el alumnado en casa dependerá de su tiempo de aprovechamiento en clase, si bien es cierto que la cantidad de ejercicios propuesta es suficientemente elevada como para no poder realizarlos todos en clase. En el caso en el que sí se puedan realizar a lo largo de la sesión, al final de la misma se proponen más ejercicios. No obstante, durante la primera semana de estancia en el centro, puesto que el alumnado se encontraba en periodo de exámenes finales correspondientes a la segunda evaluación, no se propuso tarea para casa con el fin de que pudiesen estudiar otras asignaturas. Además, esta primera semana coincidió con la introducción de la primera parte del Tema 5, relativa a contenidos que, se supone, eran previos para el alumnado (semejanza de figuras y teorema de Tales). Por tanto, las sesiones de dicha semana sirvieron a su vez de repaso de contenidos para el alumnado.

Esta metodología está bien fundada y justificada en lo que al curso de referencia se refiere, ya que el alumnado de 4º de ESO ha escogido la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas con el fin de continuar sus estudios en

Bachillerato. Por tanto, tienen que habituarse a planificar y aprovechar su tiempo de trabajo autónomo en casa, a modo de preparación y adaptación previa a la realización de estudios superiores.

No obstante, este planteamiento no exime que en determinadas ocasiones el alumnado no realice la tarea propuesta en casa o no aproveche completamente el tiempo dedicado en clase a avanzar en la misma. Sin embargo, conforme avanzan las sesiones y se va aproximando la fecha del examen, la mayor parte del alumnado realiza la tarea propuesta en casa y pregunta más dudas en el tiempo de clase.

En la Tabla 18 se muestran las actividades propuestas y su relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje:

Sesión	**Tipo**	**Tiempo estimado (min)**	**Relación con el proceso de aprendizaje**
1	Ejercicios y problemas	30	Aplicación y ampliación (uno de los problemas requiere de la movilización de un concepto no explicado/recordado por el libro)
2	Ejercicios, cuestiones y problema	30	Aplicación y repaso (semejanza)
3	Ejercicios	30	Aplicación
4	Ejercicios, cuestiones y problema	30	Aplicación y repaso de la primera parte del tema (semejanza y Tales)
5	No se manda		Repasar en casa la teoría vista en clase sobre relaciones trigonométricas en la circunferencia goniométrica (conocimiento previsto difícil)
6	Cuestión y ejercicios de aplicación	30 - 35	Aplicación
7	Ejercicios	35	Aplicación y repaso (semejanza y Tales)
8	Ejercicios	35	Aplicación y repaso (teoremas altura y cateto)
9	Ejercicios	35 - 40	Aplicación
10	Ejercicios	35 - 40	Aplicación y preparación actividad futura (el último de los ejercicios sirve como introducción a la resolución de ecuaciones trigonométricas que se verán en la siguiente sesión)

11	Ejercicios	30	Aplicación
12	Ejercicios	25	Aplicación y repaso (razones trigonométricas de π/6 rad, π/4 rad y π/3 rad)
13	Ejercicios y cuestiones	45	Refuerzo (ya se han visto todos los contenidos presentes en la unidad didáctica) y ampliación (búsqueda de una nueva relación trigonométrica entre ángulos no presente en el libro de texto: α y 90+α)
14	Ejercicios	20 - 25	Refuerzo
15	Ejercicios	60 - 65	Refuerzo
16 y 17	No hay tarea		

Tabla 18. Actividad del alumnado propuesta.

Se debe tener en consideración que en la columna perteneciente al tiempo estimado para la tarea encomendada, se ha tenido en cuenta tanto el tiempo que el alumnado pueda requerir fuera del aula, como el tiempo de que dispone en clase para su realización.

Capítulo 9. Experimentación.

En este capítulo se muestran los cuestionarios realizados por el alumnado perteneciente a los dos grupos de 4º de ESO y se analizan los resultados obtenidos en los mismos. En concreto, se realiza un análisis y contraste entre los comportamientos esperados *a priori* y los resultados realmente obtenidos en el cuestionario *a posteriori*. Con ello, se pretende determinar la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje seguido en la presente unidad didáctica, descrito en distintos apartados de capítulos anteriores.

Cabe destacar el hecho de que la unidad desarrollada introduce la trigonometría como rama de las matemáticas por primera vez en un curso de Educación Secundaria. En contraste, la primera parte del tema relativa a semejanza y aplicación del teorema de Tales, se ha trabajado previamente en los niveles inferiores.

Se elaboran dos exámenes diferentes para ambos grupos. La decisión de realizar dicha distinción responde fundamentalmente a dos objetivos: el primero, que el alumnado del primer grupo que realice el examen no pueda comentar las preguntas al otro grupo durante el período de recreo o entre clases. El segundo se debe a una cuestión relativa a la modalidad escogida por cada uno de los grupos. Mientras que el alumnado del grupo de 4ºA ha escogido la modalidad de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas con la intención de encaminarse al Bachillerato de Ciencias, el alumnado de 4ºB ha sido obligado a escoger esta modalidad de la asignatura puesto que desean seguir cursando estudios de Bachillerato. No obstante, su opción en dicho curso es la de Humanidades y Ciencias Sociales y, posteriormente, las matemáticas que cursen serán las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II. Por tal motivo, el modelo de examen para el grupo de 4ºA plantea algunos ejercicios de mayor complejidad.

Por último, dentro del modelo de examen de 4ºA, al haber tres estudiantes que presentan Trastorno de Déficit de Atención, se les realiza un examen adaptado eliminando una de las preguntas y evaluando la prueba sobre 9 puntos. Asimismo, el examen se realiza en la sesión previa al recreo para dejar ese tiempo a todo el que quiera y necesite aprovecharlo.

A continuación, se analizan los aspectos anteriormente mencionados, así como la naturaleza de la muestra y la tipología del alumnado.

9.1. Muestra y diseño de la experimentación.

El centro en el que se ha llevado a cabo el estudio objeto de este TFM es de carácter concertado y está situado en la localidad de Tafalla. Es un centro en el que se imparten todos los niveles comprendidos desde 1º de Educación Infantil hasta 4º de ESO, si bien los cursos correspondientes a la etapa de Educación Infantil se encuentran separados en otro edificio respecto de los de Educación Primaria y ESO, que a su vez están ubicados en distintos pisos dentro del mismo edificio. La parte del alumnado que desea continuar sus estudios de Bachillerato lo hace mayoritariamente en el Instituto público ubicado en la misma localidad, mientras que un porcentaje menor lo hace en un centro concertado asociado de Pamplona.

Como se ha mencionado en apartados anteriores, las clases en las que se ha realizado la experimentación son las correspondientes a los dos grupos de 4º de ESO.

En total hay 23 estudiantes en el grupo de 4ºA y 14 en el grupo de 4ºB. La razón por la que el número de estudiantes en 4ºB sea menor radica en que éstos comparten clase con estudiantes que han escogido la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas

Aplicadas. Por tanto, en la hora de matemáticas, la clase se divide en dos grupos distintos.

La mayoría del alumnado perteneciente a ambos grupos ha estudiado en el mismo centro la etapa de Educación Infantil, otros proceden de la escuela comarcal de la misma localidad, que sólo oferta formación hasta 6º de Educación Primaria, y el resto proviene de pueblos circundantes en los que sólo hay formación hasta 6º de Educación Primaria o hasta 2º de ESO.

9.2. Cuestionario.

En la sesión 17, tras haber completado la unidad didáctica correspondiente al Tema 5 y haber practicado y reforzado durante cinco sesiones los distintos tipos de actividades englobadas en la misma, se realiza una prueba escrita en formato de examen a los dos grupos de 4º de ESO.

Tras realizar un estudio preliminar en colaboración con la profesora titular de la asignatura sobre las dificultades y errores previstos en el presente tema, y teniendo en cuenta su experiencia en años anteriores, se elaboran dos modelos de examen, uno para cada grupo de estudiantes.

Los ejercicios y cuestiones seleccionados para el examen se escogen mediante una criba y modificación de ejercicios propuestos por el propio libro de texto en una sección disponible del mismo en la plataforma digital, de tal manera que se ajusten a lo estudiado y trabajado por parte del alumnado. Además, los ejercicios seleccionados se repasan y revisan por parte de la profesora para comprobar que los resultados y procedimientos seguidos son coherentes con lo visto a lo largo de las sesiones de la unidad didáctica. En un caso, uno de los ejercicios está mal planteado puesto que no se llega a cumplir la identidad trigonométrica que propone verificar, por lo que la profesora lo modifica para que sí se cumpla. Asimismo, algunos de los ejercicios propuestos por parte del libro no se ajustan en su totalidad a los ejercicios vistos en clase, bien por la forma del planteamiento o por los resultados obtenidos. En estos casos, la profesora se basa en ejercicios similares del libro de texto. Asimismo, algunos ejercicios proponen excesivos apartados para resolver determinadas ecuaciones y razones trigonométricas, con lo que se eliminan algunas de ellas con el fin de que el tiempo disponible se ajuste al necesario para su realización.

A continuación, se presentan los dos modelos de exámenes, junto con un primer análisis *a priori* sobre la resolución de los mismos.

Modelo de examen de 4ºA:

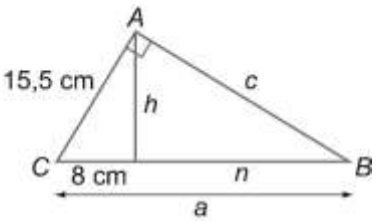
1. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas: (1p)

    a. El coseno de un ángulo siempre es positivo.
    b. La tangente de un ángulo del segundo o del tercer cuadrante es negativa.
    c. Existe un ángulo cuyo seno toma el valor de -3/2.
    d. La tangente de un ángulo siempre toma valores en el intervalo [-1,1]

2. Un polígono tiene por lados segmentos que miden a = 12 cm, b = 6 cm, c = 9 cm, d = 5 cm y e = 10 cm. Halla los lados de un polígono semejante a él y cuyo perímetro es 200 cm. (1p)

3. Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo son de 4 y 9 m. ¿Cuánto miden los catetos? ¿Y la altura sobre la hipotenusa? (1p)

4. Calcula las medidas de los segmentos desconocidos indicados por letras: (1p)



5. Si sabemos que cos A = 2/3 y que A está en el primer cuadrante, calcula las siguientes razones trigonométricas, sabiendo que A está expresado en grados: (2p)
   a) sen A =
   b) tg (90º + A) =
   c) cos (90º – A) =
   d) sen (180º + A) =

6. Si *a* es un ángulo que está en el tercer cuadrante y tg *a* = 2, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas? (1p)

7. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   a) 4 sen x + 1 = 0

   (1p)

   b) sec x = - 2 (1p)

8. Demuestra la identidad siguiente: (1p)

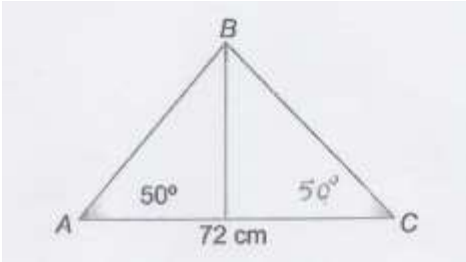
$$\frac{sen\alpha + cotg\,\alpha}{tg\,\alpha + cosec\alpha} = cos\alpha$$

Modelo de examen de 4ºB:

1. Dos triángulos isósceles tienen el mismo ángulo, 30º, en el vértice donde se unen sus lados iguales. ¿Podemos asegurar que dichos triángulos son semejantes? (1p)

2. Un triángulo tiene por lados 11 cm, 22 cm y 33 cm. El lado correspondiente al mayor, en otro triángulo semejante, es de 49,5 cm. Halla los restantes lados del triángulo semejante correspondiente. (1p)

3. Calcula el área del siguiente triángulo: (1p)



4. Si sabemos que sen A= 1/3 y que A está en el primer cuadrante, calcula las siguientes razones trigonométricas, sabiendo que A está expresado en grados: (1,5p)

   a) tg A =
   b) sen (90º + A) =
   c) cos (180º - A) =

5. Expresa cada una de estas razones trigonométricas en función de otra equivalente de un ángulo del primer cuadrante: (1,5p)

   a) cos 850º =
   b) cos (-300º) =
   c) sen (540º) =

6. Si A es un ángulo del tercer cuadrante cuyo cos A = -1/5, halla el resto de razones trigonométricas. (1p)

7. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   a) 3 cos x - 1 = 0 (1p)

   b) 4 + tg x = 0 (1p)

8. Demuestra la identidad: (1p)

$$\cos^2 x + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} = -\mathrm{sen}^2 x + \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$$

Como puede observarse, todas las preguntas del examen versan sobre los distintos contenidos principales trabajados a lo largo de la unidad didáctica.

En el modelo de examen de 4ºA, las preguntas 2, 3 y 4 del mismo tratan sobre la semejanza de figuras y la aplicación de los teoremas de la altura y del cateto. El resto de preguntas guardan relación con contenidos de trigonometría. En concreto, ejercicios de comprobación de igualdades trigonométricas, resolución de ecuaciones trigonométricas, relaciones entre razones trigonométricas de distintos cuadrantes y relaciones entre ciertos ángulos de diferentes cuadrantes. Por último, también hay una pregunta sobre cuestiones teóricas vistas a lo largo del tema, en concreto, la acotación de los valores del seno y del coseno y los signos de las razones trigonométricas en los cuadrantes.

En el modelo de examen de 4ºB, las dos primeras preguntas son relativas a la semejanza de triángulos, la primera de carácter más teórico, y la segunda de aplicación práctica. Hay un problema que consiste en hallar el área de un triángulo y que requiere del empleo de las razones trigonométricas. Otras tres preguntas responden a relaciones entre razones trigonométricas y entre ciertos ángulos de distintos o de un mismo cuadrante. Las dos últimas tratan sobre la resolución de ecuaciones trigonométricas y la comprobación de una identidad trigonométrica.

9.3. Cuestiones y comportamientos esperados.

A continuación se analizan los resultados esperados en ambos exámenes y las razones que hacen pensar en ellos.

Comenzamos analizando el modelo de examen de 4ºA. En la primera pregunta no se esperan muchas dificultades ya que involucran nociones teóricas básicas que se supone que deben ser conocidas, si bien puede haber dudas acerca de si la tangente se encuentra o no acotada entre los mismos valores que el seno y el coseno, ya que su representación no se ve gráficamente en la circunferencia goniométrica.

En las preguntas 2, 3 y 4 tampoco es de esperar que haya grandes dificultades ya que son ejercicios de aplicación similares a los del libro de texto. Hay que realizar operaciones sencillas aplicando la razón de proporcionalidad *k* para figuras semejantes y conocer tanto las fórmulas del teorema de la altura y del cateto como el teorema de Pitágoras. Éste último ha demostrado no presentar ningún tipo de problema para el alumnado, que de hecho lo aplica bien.

En la segunda parte del examen, a partir de la pregunta 5, se prevé que el alumnado tenga un mayor porcentaje de errores y dificultades en su ejecución. El motivo es que en esta parte se pretende evaluar la adquisición de los nuevos contenidos sobre trigonometría vistos en clase, que han resultado ser bastante duros de asimilar para la mayoría de estudiantes. La pregunta 5, que propone calcular razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes que guardan alguna relación entre sí, ha sido practicada a lo largo de muchos ejercicios en el libro de texto. No obstante, suele haber bastantes errores por parte del alumnado al relacionar ángulos de distintos cuadrantes, sobre todo en lo que a la relación de los signos de las razones trigonométricas se refiere. En conclusión, se espera que en este ejercicio un porcentaje importante del alumnado falle, al menos en uno de los apartados planteados.

El ejercicio 6 no se espera que sea de los que mayor dificultad planteen, ya que requiere conocer y aplicar una identidad trigonométrica sencilla practicada a lo largo de varios ejercicios y tener en cuenta los signos de las razones trigonométricas en función del cuadrante en el que se encuentran. Este tipo de ejercicios, en los que solamente hay que trabajar con razones trigonométricas de un cuadrante son habitualmente bien ejecutados por el alumnado.

Los ejercicios 7 y 8 son, según la experiencia en el aula, los que mayores dificultades van a plantear a la gran mayoría del alumnado, como se observó en el análisis de errores y dudas más frecuentes del capítulo 7. En concreto, el ejercicio 7 se prevé que sea el que mayor dificultad genere al alumnado. Se piensa esto ya que la experiencia en el aula ha dejado patente que es donde más dudas hay a la hora de proceder por buena parte del alumnado, evidenciando la dificultad epistemológica que entraña la resolución de este tipo de ecuaciones. Por tanto, es de suponer que en esta pregunta se cometa el mayor porcentaje de errores, seguida muy probablemente por la 8 y la 5 (no necesariamente en ese orden). Por último, el ejercicio 8 no se espera que genere una dificultad tan elevada en su ejecución como el 7, aunque sí se espera que haya un elevado número de errores cometidos por el alumnado. En concreto, se espera que el alumnado cometa más errores en la definición de las razones trigonométricas inversas.

Analizamos a continuación el modelo de examen de 4ºB. En las dos primeras preguntas no se espera que haya mayores dificultades por parte del alumnado, teniendo en cuenta la experiencia en el aula con ejercicios similares.

En la pregunta 3 sí que se prevé que haya dificultades importantes, sobre todo a la hora de plantear el problema, ya que este tipo de actividad no se ha trabajado apenas en este tema.

En los ejercicios 4 y 5, a partir del análisis conjunto realizado con la profesora, se espera que sólo la mitad de la clase los realicen bien completamente, a pesar de haber resuelto en clase muchos ejercicios similares. Los motivos que hacen pensar en ello son, por un lado, los errores observados en la corrección de la tarea de este tipo de ejercicios y por otro, la experiencia previa de la profesora en la realización de otros exámenes con el alumnado de la clase.

El ejercicio 6 se espera que sea resuelto bien por la mayoría del alumnado, ya que se han hecho varios ejercicios muy similares a éste en clase. Los errores que se cometan es de esperar que sean debidos a no tener en cuenta el signo de las razones trigonométricas en función del cuadrante en el que se encuentran, un error típico observado en el aula.

Por último, los ejercicios 7 y 8 forman parte del tipo de ejercicios que más dificultades plantean en su ejecución al alumnado. En particular, el ejercicio 7 consiste en la resolución de ecuaciones trigonométricas. En este tipo de ejercicios se cometen bastantes errores provocados por olvidar añadir el número de vueltas completas a la solución, añadirlas incorrectamente tras despejar la solución y, sobre todo, olvidarse o hallar incorrectamente la segunda solución a partir de la primera. En el primer apartado se espera que haya un mayor porcentaje de aciertos que en el segundo, debido a que la primera solución que se obtiene en el apartado *a* al emplear la calculadora se encuentra en el primer cuadrante, mientras que en el apartado *b* la calculadora proporciona una solución del cuarto cuadrante. Se ha observado en la corrección de la tarea a lo largo de las sesiones que el alumnado tiene más facilidad a la hora de relacionar la segunda solución si el primer ángulo se ubica en el primer cuadrante. Finalmente, podría realizarse un análisis similar para el caso del ejercicio 8.

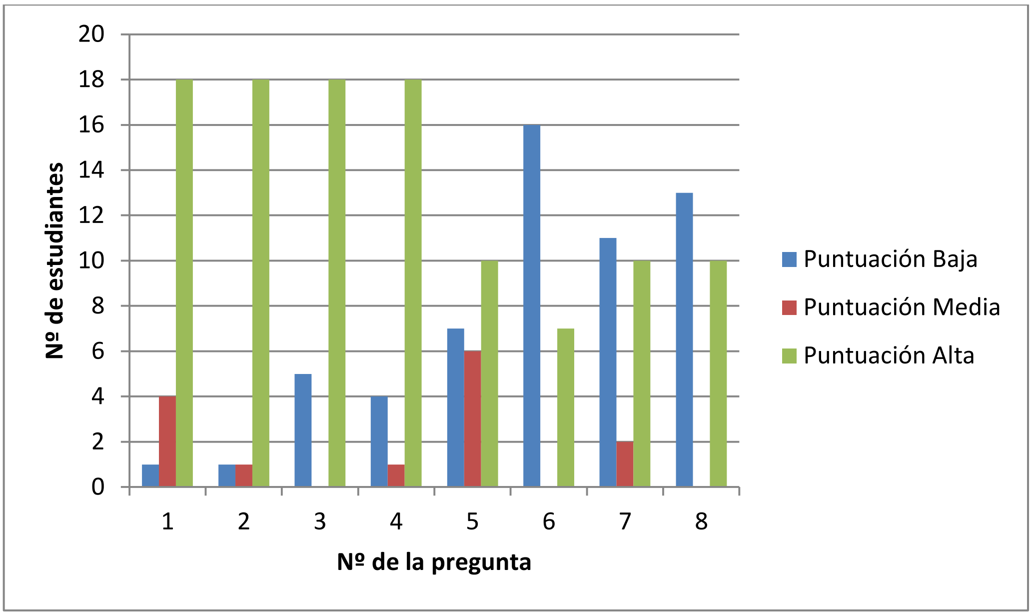


Figura 12. Resultados del cuestionario de 4ºA por preguntas.

9.4. Resultados.

A continuación, analizamos los resultados del examen de 4ºA. Como muestra la Tabla 19, la mayor parte del alumnado ha aprobado el examen (78%) dentro del cual la mitad del porcentaje (39%) corresponde a notables y sobresalientes, cifra nada desdeñable. En la Figura 12 se muestran las calificaciones obtenidas por el alumnado en cada una de las preguntas, según la puntuación obtenida respecto al total en cada una de las mismas.

Una puntuación calificada como alta corresponde con una puntación mayor o igual al 60% respecto del total. Análogamente, una puntuación media corresponde con una puntuación entre el 40% y el 60% respecto a la total (ambos porcentajes incluidos), y una puntuación baja con una puntuación menor al 40% respecto de la puntuación total.

Notas	% Alumnado
<5	22
[5 - 6)	22
[6 - 7)	17
[7 - 8)	22
[8 - 9)	4
[9 - 10]	13

Tabla 19. Calificaciones del examen del grupo de 4ºA.

En lo que respecta al tipo de errores cometidos por el alumnado, éstos se pueden dividir en dos grupos principales: los errores operacionales y los no operacionales. Los primeros son debidos a errores cometidos en el cálculo numérico de alguna operación o desarrollo matemático, por lo que no implican una falta de conocimiento. Los segundos abarcan todos aquellos errores cometidos bien por desconocimiento o por confusión de los conocimientos matemáticos evaluados. No implican necesariamente un error de tipo numérico, aunque puede darse.

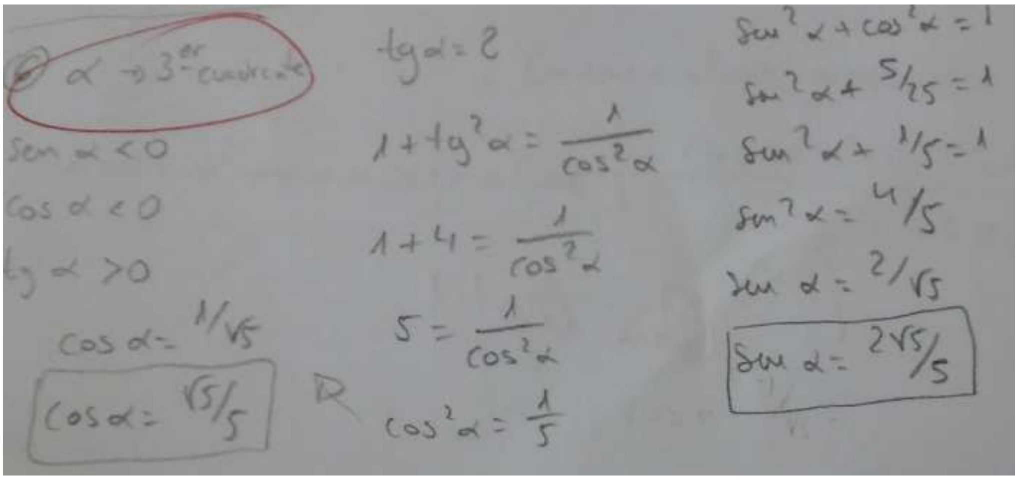


Figura 13. Error operacional por despiste en el examen de 4ºA.

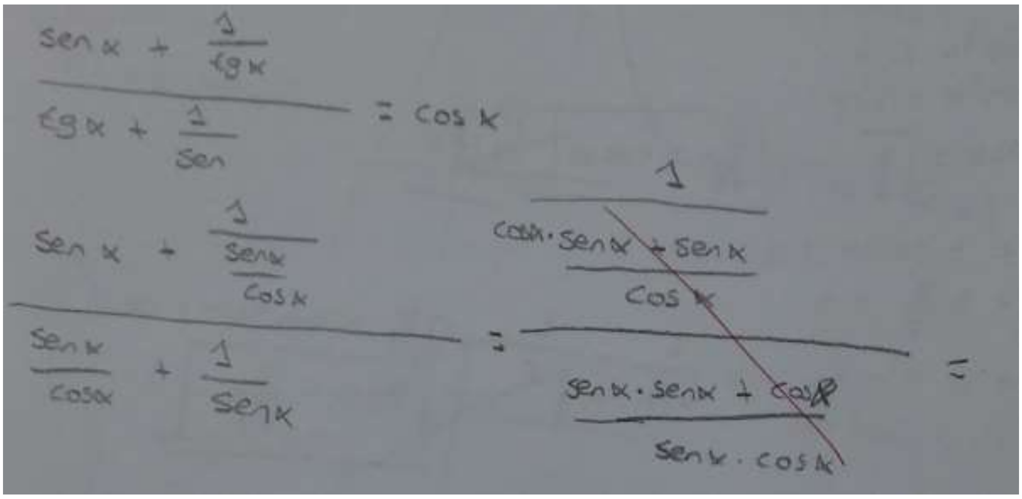


Figura 14. Error operacional en la suma de fracciones en el examen de 4ºA.

A continuación se muestran algunos de los errores más recurrentes de ambos tipos en los distintos exámenes de los estudiantes. En la Figuras 13 y 14 se observan dos tipos de errores operacionales. En la Figura 13 el ejercicio se ha planteado correctamente, apareciendo un error operacional debido a una confusión en el signo de las razones trigonométricas resultantes. Por otro lado, en la Figura 14 el error cometido consiste en sumar incorrectamente dos expresiones trigonométricas que requieren el empleo de fracciones, por lo que el resultado obtenido a partir de dicha operación es incorrecto.

En la Figuras 15 y 16 se muestran dos tipos de errores no operacionales frecuentes. El error no operacional de la Figura 15 muestra dos grados distintos de un mismo tipo de error, que es el cometido al relacionar razones trigonométricas de ciertos ángulos que no están ubicados en el primer cuadrante. En uno de los casos no se ha sabido plantear nada, mientras que en el otro, dos de los cuatro apartados están bien y los dos que están mal se han planteado e intentado resolver, aunque sin éxito.

Algo similar ocurre con los errores de la Figura 16. En este caso el tipo de error se origina al relacionar cuadrantes con ángulos y razones trigonométricas. Al igual que en el caso anterior, en uno de ellos no se ha sabido ubicar las razones trigonométricas en el tercer cuadrante, mientras que en el otro se ha hecho incorrectamente.

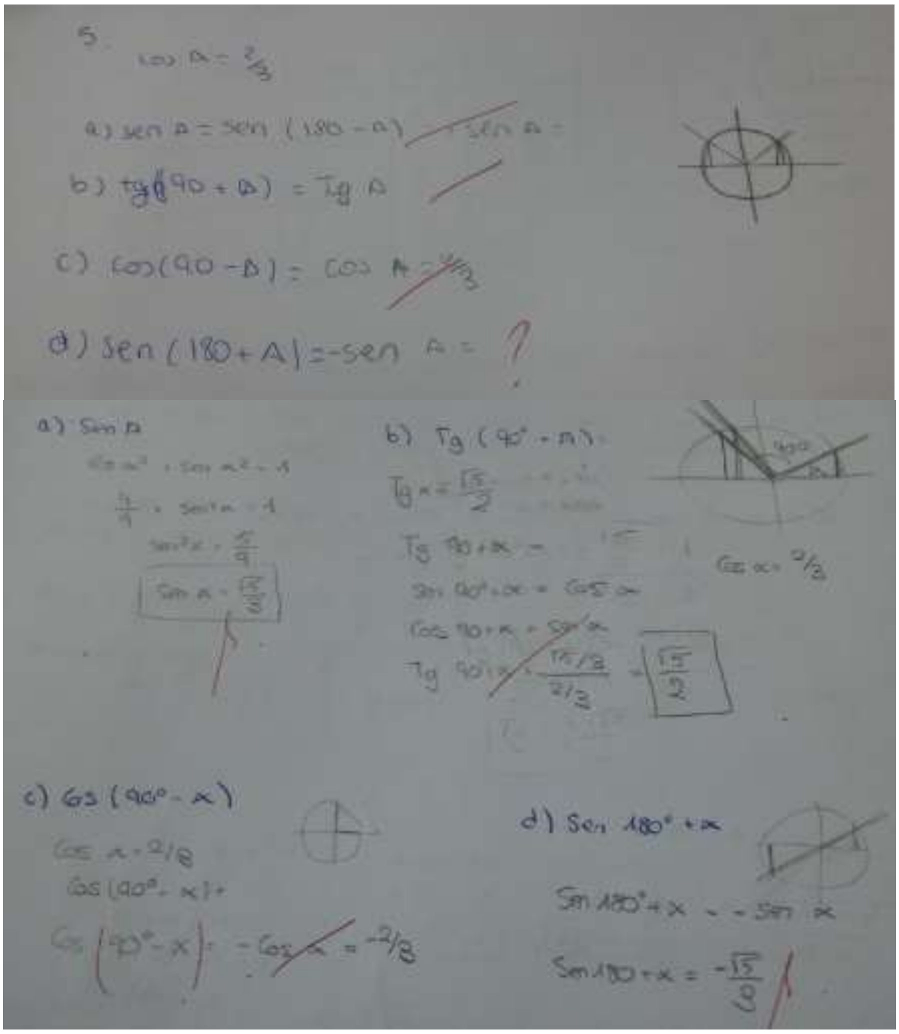


Figura 15. Error no operacional 1 en el examen de 4ºA.

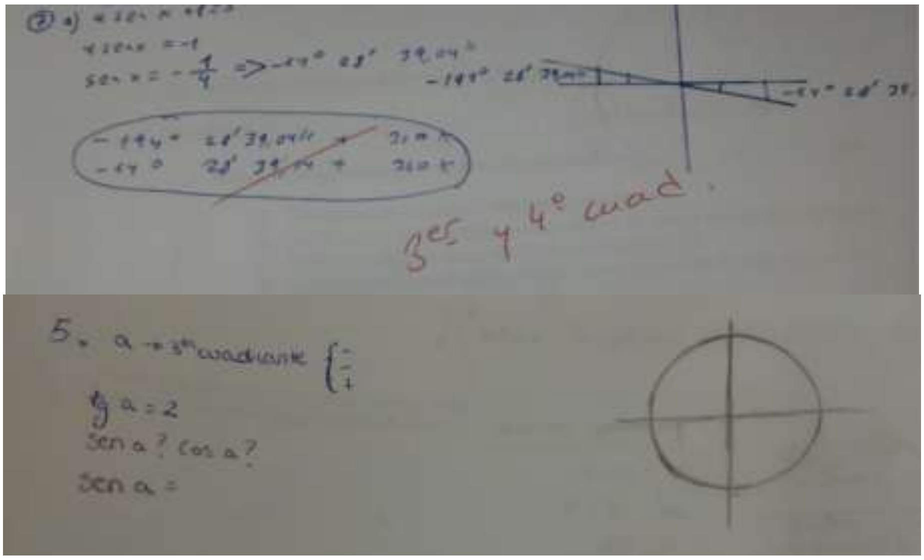


Figura 16. Error no operacional 2 en el examen de 4ºA.

.

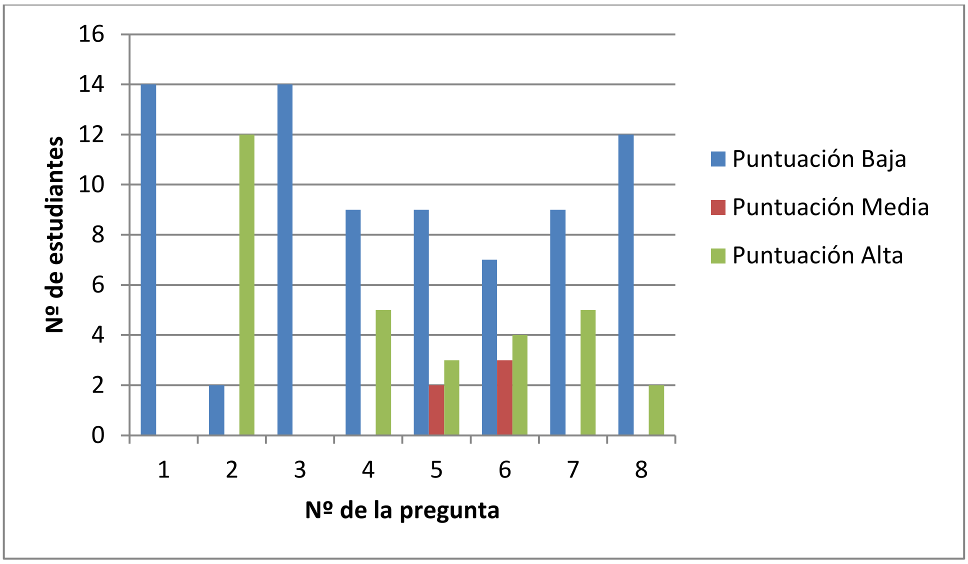


Figura 17. Resultados del cuestionario de 4ºB por preguntas.

A continuación, analizamos los resultados del examen de 4ºB. En este grupo, solamente ha aprobado una de las catorce personas que han realizado el examen, habiendo calificaciones bastante bajas en algunos casos. Éstas se encuentran recogidas en la Tabla 20. En la Figura 17 se muestran las calificaciones obtenidas por el alumnado en cada una de las preguntas, según la puntuación obtenida respecto al total en cada una de las mismas. La notación empleada es la misma que en el caso anterior.

Notas	% Alumnado
≥5	7
[4 - 5)	21
[3 - 4)	7
[2 - 3)	43
[1 - 2)	14
[0 - 1]	7

Tabla 20. Calificaciones del examen del grupo de 4ºB.

En cuanto a los errores observados en los distintos exámenes, se procede de forma análoga al otro curso, mostrando ejemplos de errores operacionales y no operacionales.

Los errores operacionales más importantes quedan reflejados en la Figura 18. Al igual que ocurría en el examen de 4ºA, el origen de estos errores es la confusión en los signos de las razones trigonométricas, una vez se ha planteado correctamente el ejercicio.

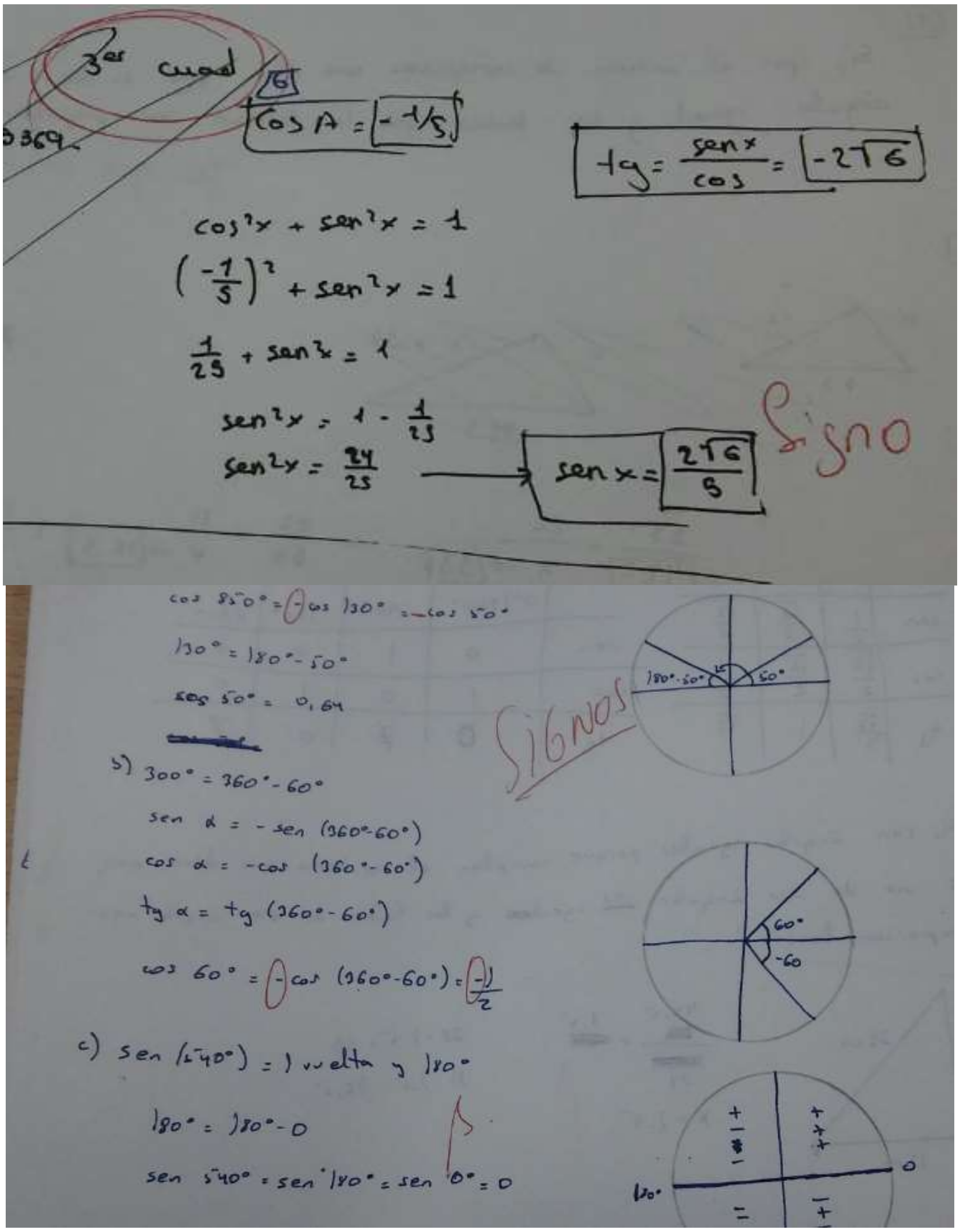


Figura 18. Errores operacionales por despiste en el examen de 4ºB.

En los errores no operacionales tenemos varios tipos de orígenes distintos para cada uno de ellos. En la Figura 19 se muestra un error de tipo conceptual, que lleva a la confusión sobre los criterios de semejanza de triángulos en una cuestión de tipo teórico. En la Figura 20 se muestran dos errores cuyo origen se encuentra en el procedimiento a la hora de llevar a cabo la resolución de dos ejercicios distintos, uno de ecuaciones trigonométricas y otro de semejanza de triángulos. En el primero de ellos el desconocimiento es total, mientras que en el segundo hay una aplicación errónea en el procedimiento. Por último, el error de la Figura 21 también se produce por llevar a cabo un procedimiento erróneo, solo que en este caso el error es forzado por el estudiante para poder aplicar un procedimiento que domina y entiende.

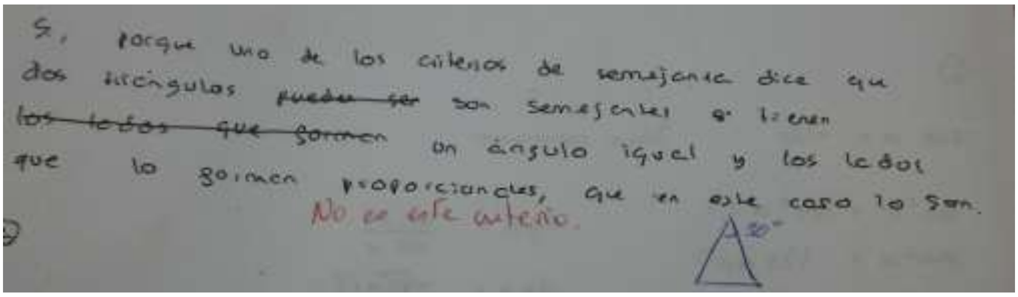


Figura 19. Error conceptual teórico en el examen de 4ºB.

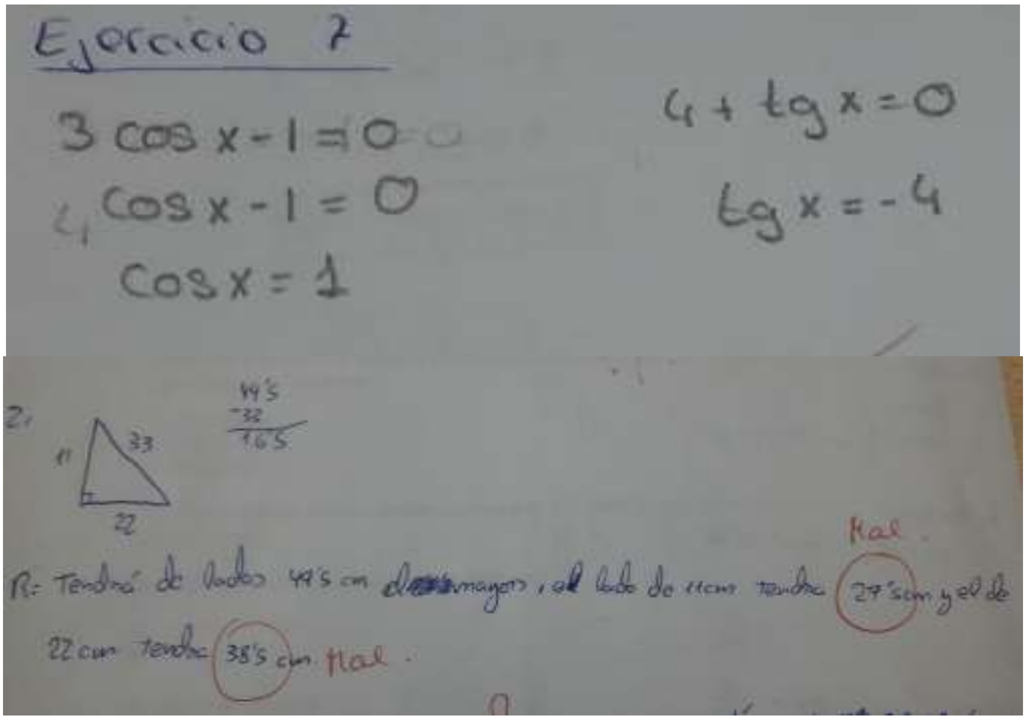


Figura 20. Error no operacional de procedimiento en el examen de 4ºB.

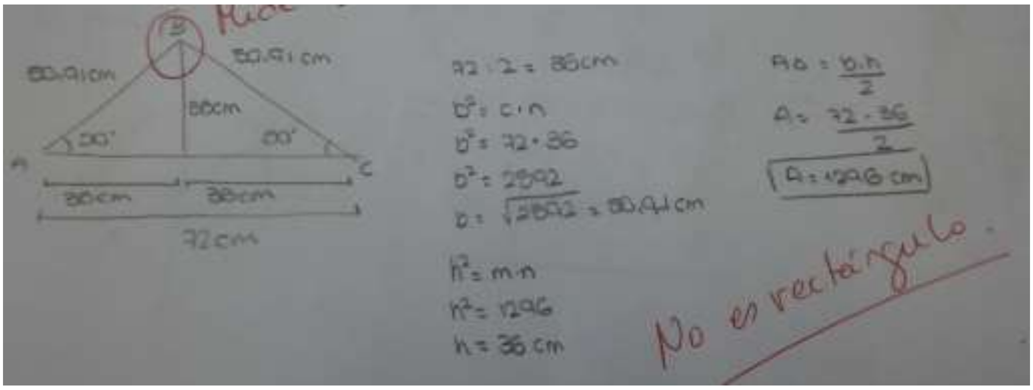


Figura 21. Error forzado en el examen de 4ºB.

9.5. Discusión de los resultados.

A continuación, se comparan los resultados observados en el examen con los esperados, para cada uno de los grupos de 4º de ESO.

Comenzamos contrastando los resultados en 4ºA. Los resultados observados en el examen se han ajustado bien con los resultados esperados. Se ha observado que en la primera mitad del examen el porcentaje de errores cometidos ha sido menor que en la segunda, tal como se había previsto.

En primer lugar, analizamos los ejercicios en los que los resultados esperados y los obtenidos han sido similares, que son los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5 y 8. En el ejercicio 1 el mayor porcentaje de errores cometidos es debido a la confusión sobre acotación de valores de las razones trigonométricas. No obstante, el porcentaje de éxito en la pregunta es elevado, ajustándose a lo esperado. Algo similar ocurre en los ejercicios 2, 3 y 4, en los que los errores más significativos son de tipo operacional. Los resultados del ejercicio 5 reflejan un mayor porcentaje de errores cometidos por el alumnado, hecho previsto en el análisis *a priori*. Se esperaba que un porcentaje elevado de la clase errara en al menos uno de los cuatro apartados, habiendo resultado ser finalmente este porcentaje de un 91,3%. Por último, el ejercicio 8 ha resultado ser uno de los que mayor dificultad ha planteado al alumnado, como ya se esperaba en el análisis *a priori* del mismo.

En segundo lugar, analizamos los ejercicios 6 y 7, que son aquéllos en los que ha habido una mayor diferencia entre el análisis de los resultados esperados y los observados. En el ejercicio 6 se esperaba un menor número de errores por parte del alumnado, en su mayoría debidos a la asignación incorrecta de signos a las razones trigonométricas. No obstante, la tipología de este error sí se ajusta con la prevista. El ejercicio 7, a pesar de ser uno de los ejercicios con más errores cometidos por el alumnado, no ha sido el que mayor dificultad ha planteado al mismo, ya que en los ejercicios 8 y 5 el porcentaje de errores cometidos por el alumnado es mayor.

En general, los resultados observados en este grupo son muy positivos en lo que respecta a las calificaciones obtenidas por la clase. En este caso, el alumnado parece haber realizado un trabajo más autónomo en casa, y además, su motivación a la hora de estudiar es mayor, puesto que su intención es continuar por la modalidad de Ciencias en los cursos de Bachillerato.

A continuación, pasamos a realizar un análisis similar en el grupo de 4ºB. En este caso, el porcentaje de errores cometidos en el examen ha sido mayor del que se esperaba, sobre todo teniendo en cuenta que solamente ha aprobado una de las catorce personas.

En primer lugar, analizamos los errores y dificultades observadas en el examen que se ajustan a lo esperado, como es el caso de los errores cometidos en los ejercicios 3 y 8, si bien no se esperaba que la totalidad del alumnado errara en el ejercicio 3. Los ejercicios 2 y 7 también se ajustan bastante bien al contrastar los porcentajes de éxito esperados en dichas preguntas y los observados.

En segundo lugar, analizamos las preguntas del examen que peor se han ajustado en lo que a resultados esperados y obtenidos se refiere. En las preguntas 4 y 5 no se esperaba que un porcentaje tan elevado del alumnado no planteara ninguno de los apartados, ya que algunos estudiantes sólo han relacionado los signos de las razones trigonométricas en los cuadrantes, sin los valores numéricos. Por último, las preguntas 1 y 6 son las más dispares en cuanto a resultados esperados y observados, puesto que la experiencia en el aula hizo pensar que éstos eran contenidos sencillos comprendidos por la mayoría del alumnado, pero en realidad no era así.

Una posible explicación a este hecho es la falta de trabajo autónomo por parte del alumnado. Esto, unido a la dificultad epistemológica de los contenidos trigonométricos, ha podido ser el motivo causante del elevado número de errores observados. Además, el alumnado de esta clase tiene intención de continuar la modalidad de Humanidades y

Ciencias Sociales en Bachiller, por lo que la motivación para estudiar esta modalidad de la asignatura no es tan elevada como en el otro grupo.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.

En este apartado se realiza una breve síntesis del contenido del presente trabajo, y se plantean las principales conclusiones del mismo y algunas cuestiones abiertas a modo de reflexión.

Breve síntesis

En este trabajo se lleva a cabo un análisis de la enseñanza de la trigonometría en 4º de ESO. En la primera parte de la memoria se describe la distribución del currículo en cuanto a contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la trigonometría, que es la rama de las matemáticas objeto de estudio. Su evolución se compara con la que siguen los libros de texto en la materia mencionada, con el fin de analizar la coherencia entre ambas partes. En la segunda parte del trabajo se analiza, en primer lugar, la estructura y organización de la unidad didáctica correspondiente a semejanza y trigonometría del libro de texto de 4º de ESO usado como referencia en el centro de Educación Secundaria. En segundo lugar, se describe la temporización de las sesiones del proceso de estudio de la unidad didáctica hasta la fecha de evaluación de la misma, que se realiza mediante una prueba escrita. A continuación, se incluye una reflexión sobre las dificultades y errores esperados en el aprendizaje de la unidad didáctica y, posteriormente, un análisis *a priori* sobre los resultados esperados del alumnado en la prueba escrita. Por último, se contrastan dichos resultados con los obtenidos por los estudiantes tras la realización de la prueba. El objetivo es obtener conclusiones acerca de posibles puntos de mejora, o aspectos a mantener, tanto en la impartición de la unidad didáctica como en el diseño de la evaluación de la misma.

Conclusiones generales del trabajo.

En primer lugar, se puede observar una buena coherencia entre la evolución seguida por los libros de texto en lo que respecta a la trigonometría y el recorrido longitudinal del currículo oficial.

No es sencillo impartir por primera vez un conocimiento nuevo y complejo como es la trigonometría. Se requiere ser claro en la explicación de los nuevos conceptos y procedimientos introducidos, tratando de relacionarlos, en la medida de lo posible, con otros conocimientos previos que posea el alumnado. Además, se debe procurar que los conocimientos emergentes sean integrados por parte de los alumnos con el fin de sentar las bases para los cursos de Bachillerato, en los que éstos se desarrollan en mayor profundidad.

A lo largo de la fase de experimentación, se ha observado que un factor significativo en las calificaciones obtenidas en la prueba escrita es la influencia del trabajo autónomo del alumno así como la motivación. El grupo en el que las calificaciones han sido más bajas está obligado a cursar las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas para poder continuar sus estudios de Bachillerato, a pesar de escoger la opción de Humanidades y Ciencias Sociales. En contraposición, el otro grupo pretende continuar sus estudios de Bachillerato en la modalidad de Ciencias.

Por su parte, a la hora de planificar las sesiones se ha de tener en cuenta que el tiempo disponible para impartir todos los contenidos de 4º de ESO es escaso, por lo que se ha optado por una optimización del recurso temporal, atendiendo a la idoneidad didáctica mediacional.

En el siguiente apartado se plantean algunos matices a estas conclusiones y otras cuestiones abiertas.

Cuestiones abiertas

Una cuestión que cabe plantearse es cómo se puede conseguir aumentar la motivación del alumnado menos propenso al trabajo autónomo. Una posible opción es buscar formas alternativas de impartir los contenidos, para lo cual sería conveniente invertir el orden de los temas 5 y 6. Este cambio permitiría comenzar el estudio de la trigonometría mediante sus aplicaciones en la resolución de triángulos y el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas. En este sentido, se podría preparar alguna actividad colaborativa que contextualice el uso de las razones trigonométricas. Por ejemplo, hallar la distancia entre dos puntos separados entre sí mediante la resolución de triángulos. No obstante, hay que tener en cuenta dos aspectos desfavorables a esta metodología. El primero es la escasez de tiempo para llevar a cabo la actividad, problema bastante habitual teniendo en cuenta la extensión de contenidos a impartir durante el curso. El segundo es el hecho de que esta metodología no es igual de eficaz para todos los estudiantes, además de que algunos de ellos pueden ofrecer resistencia a la misma por falta de hábito.

Otra cuestión a plantearse es la posibilidad de introducir el estudio de las funciones trigonométricas mediante aplicaciones informáticas como GeoGebra, para poder llevar a cabo un análisis más completo de la trigonometría. En este sentido, es probable que ciertos aspectos de la trigonometría, tales como la igualdad de los valores de razones trigonométricas en ángulos que difieren un múltiplo entero de 360º, se comprenda mejor por el alumnado al visualizar la representación gráfica de las funciones trigonométricas. Además, de este modo, se seguirían las indicaciones del currículo sobre el uso de TICs y software dinámico, no incluidas en los libros de texto.

Referencias

Bibliografía

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Especial), 133–156.

Gelfand, I. M., Saul, M. (2001). Trigonometry. Springer Science + Business Media.

Libros de texto

Nieto, M., Pérez, A., Alcaide, F. (2016). Matemáticas 2 ESO. Ediciones SM.

Alcaide, F., Hernández, J., Esteban, S., Moreno, M., Pérez, A. (2015). Matemáticas 3 ESO orientadas a las enseñanzas académicas. Ediciones SM.

Alcaide, F., Hernández, J., Esteban, S., Moreno, M., Pérez, A., Donaire, J. J. (2016). Matemáticas 4 ESO orientadas a las enseñanzas académicas. Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., Hernández, J., Alcaide, F. (2008). Matemáticas 1 Ciencias y Tecnología. Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., Hernández, J., Alcaide, F. (2008). Matemáticas 2 Ciencias y Tecnología. Ediciones SM.

Legislación

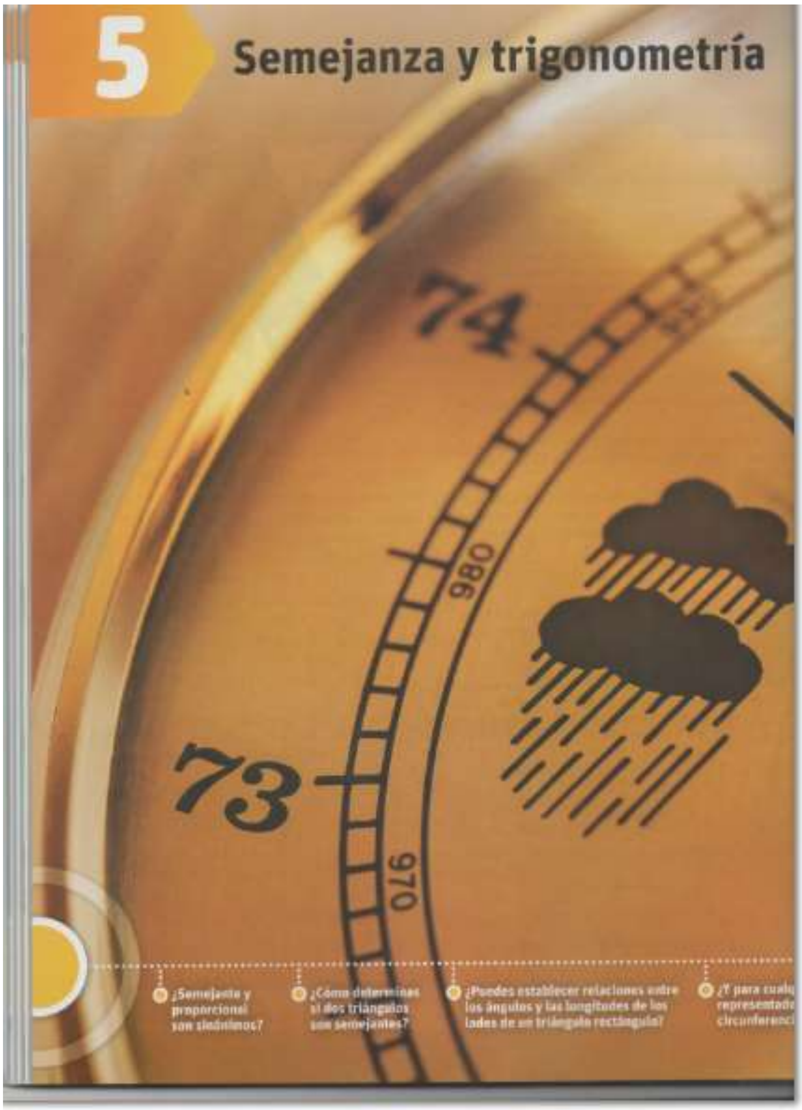
Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

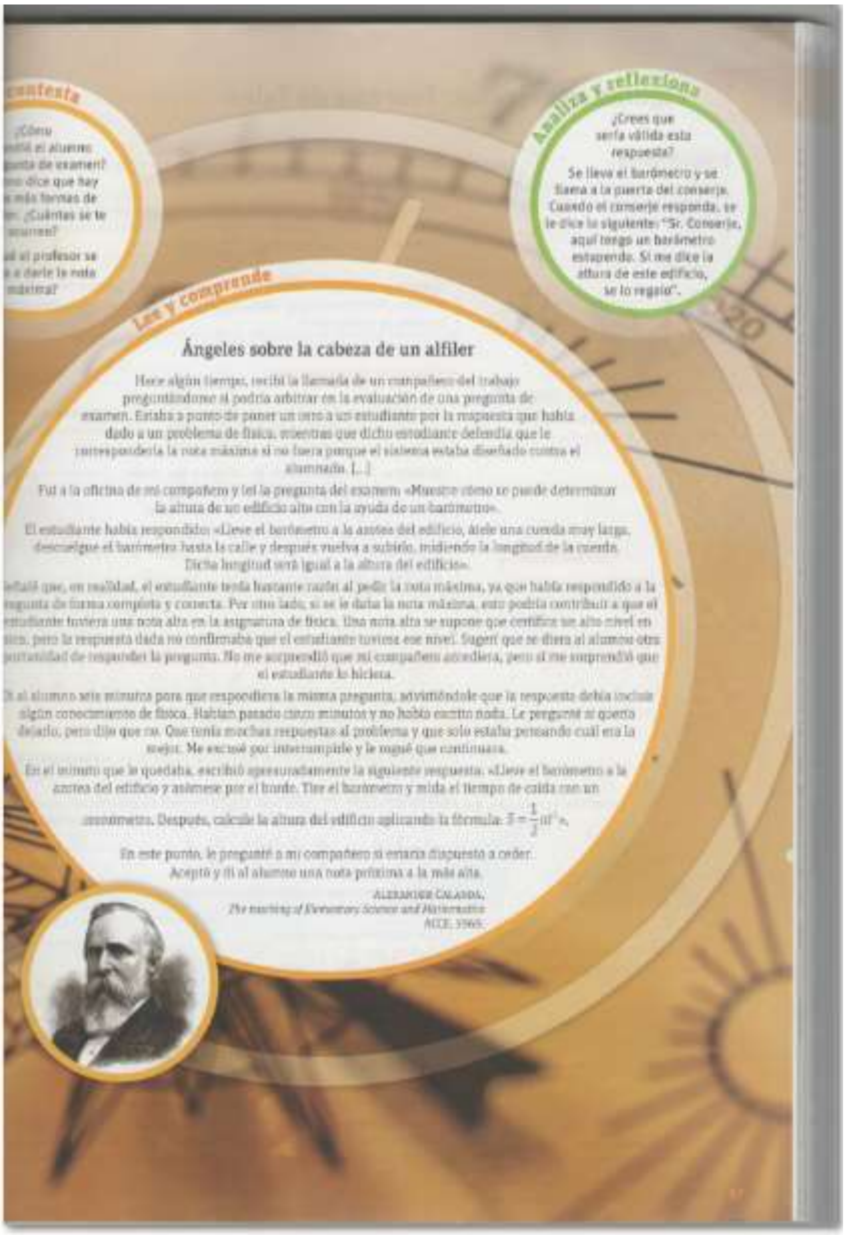
Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto

A. Unidad didáctica del libro de texto.





...ntesta

¿Cómo ...ntió el alumno ...gunta de examen? ...mo dice que hay ... más formas de ...er. ¿Cuántas se te ocurren?

...al el profesor se ... a darle la nota máxima?

Analiza y reflexiona

¿Crees que sería válida esta respuesta?

Se lleva el barómetro y se llama a la puerta del conserje. Cuando el conserje responda, se le dice lo siguiente: "Sr. Conserje, aquí tengo un barómetro estupendo. Si me dice la altura de este edificio, se lo regalo".

Lee y comprende

Ángeles sobre la cabeza de un alfiler

Hace algún tiempo, recibí la llamada de un compañero del trabajo preguntándome si podría arbitrar en la evaluación de una pregunta de examen. Estaba a punto de poner un cero a un estudiante por la respuesta que había dado a un problema de física, mientras que dicho estudiante defendía que le correspondería la nota máxima si no fuera porque el sistema estaba diseñado contra el alumnado. [...]

Fui a la oficina de mi compañero y leí la pregunta del examen: «Muestre cómo se puede determinar la altura de un edificio alto con la ayuda de un barómetro».

El estudiante había respondido: «Lleve el barómetro a la azotea del edificio, átele una cuerda muy larga, descuélgue el barómetro hasta la calle y después vuelva a subirlo, midiendo la longitud de la cuerda. Dicha longitud será igual a la altura del edificio».

...ñalé que, en realidad, el estudiante tenía bastante razón al pedir la nota máxima, ya que había respondido a la ...gunta de forma completa y correcta. Por otro lado, si se le daba la nota máxima, esto podría contribuir a que el estudiante tuviera una nota alta en la asignatura de física. Una nota alta se supone que certifica un alto nivel en ...ica, pero la respuesta dada no confirmaba que el estudiante tuviera ese nivel. Sugerí que se diera al alumno otra ...portunidad de responder la pregunta. No me sorprendió que mi compañero accediera, pero sí me sorprendió que el estudiante lo hiciera.

...i al alumno seis minutos para que respondiera la misma pregunta, advirtiéndole que la respuesta debía incluir algún conocimiento de física. Habían pasado cinco minutos y no había escrito nada. Le pregunté si quería dejarlo, pero dijo que no. Que tenía muchas respuestas al problema y que solo estaba pensando cuál era la mejor. Me excusé por interrumpirle y le rogué que continuara.

En el minuto que le quedaba, escribió apresuradamente la siguiente respuesta: «Lleve el barómetro a la azotea del edificio y asómese por el borde. Tire el barómetro y mida el tiempo de caída con un cronómetro. Después, calcule la altura del edificio aplicando la fórmula: $h = \frac{1}{2}gt^2$».

En este punto, le pregunté a mi compañero si estaría dispuesto a ceder. Aceptó y di al alumno una nota próxima a la más alta.

ALEXANDER CALANDRA,
The teaching of Elementary Science and Mathematics
ACCE, 1969.

1 Figuras semejantes. Teorema de Tales

Ten en cuenta

Los ángulos, puntos, lados... que se corresponden en una semejanza se llaman **homólogos**.

Dos **figuras geométricas** son **semejantes** si tienen la misma forma aunque difere... tes dimensiones.

El cociente entre la distancia de dos puntos cualesquiera de una figura y la distan... entre los puntos homólogos en la otra es constante y se denomina **razón de seme... janza**, k.

Ejemplo ▸ Las figuras de la imagen son semejantes porque tienen la misma for... distintas dimensiones. Los lados l y l', los ángulos α y α' son homólogos. Como $l' =$ ... la razón de semejanza es 2.

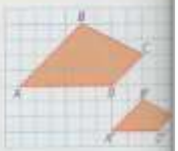
Polígonos semejantes

Dos **polígonos** con el mismo número de lados son **semejantes** cuando sus ángu... homólogos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

Ejemplo ▸ Los cuadriláteros de la figura son semejantes, ya que sus ángulos homólogos son iguales al ser paralelos los lados homólogos que los forman.

Observa, asimismo, que sus lados homólogos son proporcionales:

$\overline{AB} = 2\overline{A'B'}$ $\quad \overline{BC} = 2\overline{B'C'}$ $\quad \overline{CD} = 2\overline{C'D'}$ $\quad \overline{DA} = 2\overline{D'A'}$



Razones de longitudes, áreas y volúmenes

Si dos **figuras** son **semejantes** con **razón de semejanza** k:

- La razón de dos **longitudes** homólogas es también k.
- La razón de las **áreas** es k^2.
- En el caso de cuerpos en el espacio, la razón de los **volúmenes** es k^3.

Ejemplo ▸ Halla las razones de semejanza que se indican.

- De los perímetros de estos rectángulos semejantes y de sus áreas.

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = k \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{3\cdot 2 + 2\cdot 2}{6\cdot 2 + 4\cdot 2} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = k$$

La razón entre los perímetros coincide con la razón entre los lados.

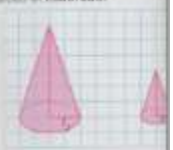
La razón entre las áreas es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3\cdot 2}{6\cdot 4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = k^2$$

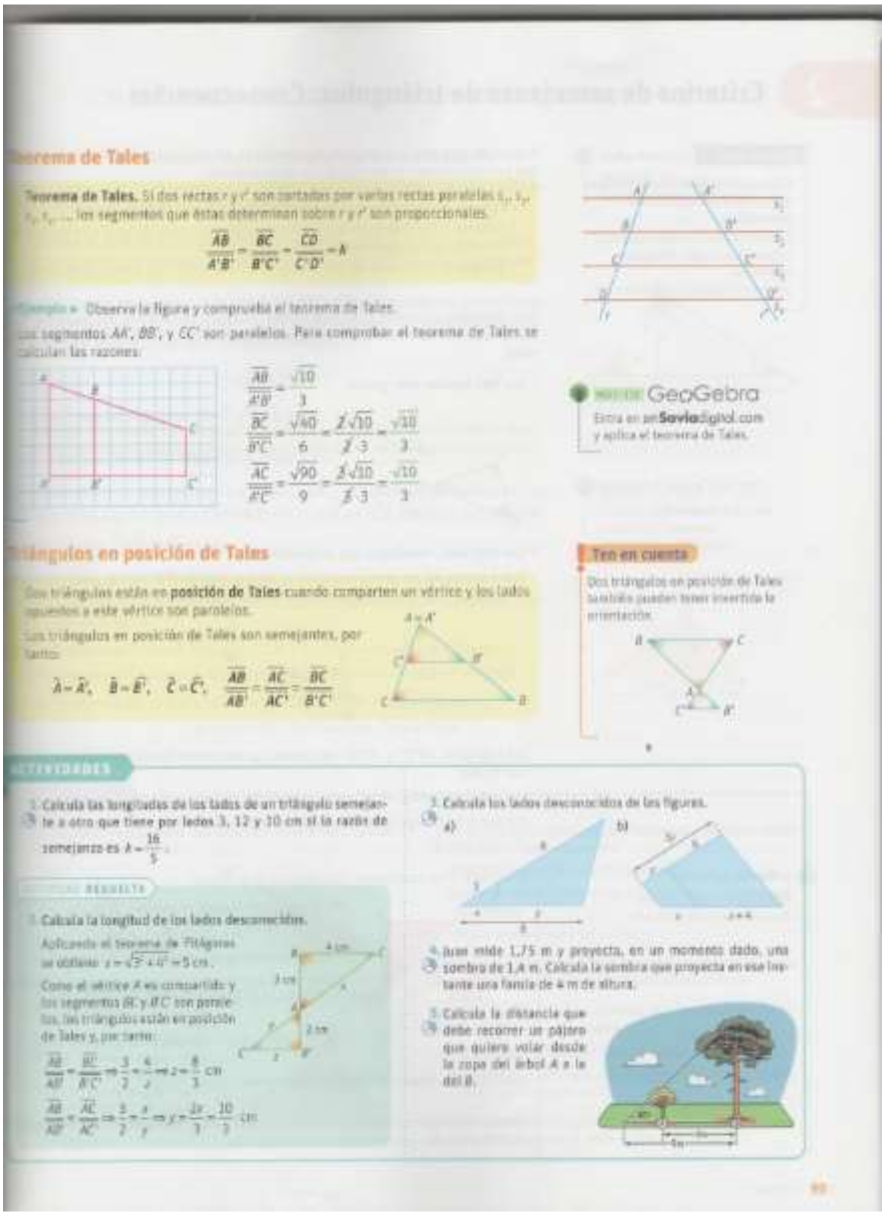
La razón entre las áreas es igual a la razón entre los lados al cuadrado.

- De los volúmenes de los conos semejantes:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} = k \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{\pi}\cdot 3}{\cancel{\pi}\cdot 2^3\cdot 6} = \frac{\cancel{3}}{2^3\cdot \cancel{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = k^3$$



La razón entre los volúmenes es la razón entre los radios al cubo.



Teorema de Tales

Teorema de Tales. Si dos rectas r y r' son cortadas por varias rectas paralelas s_1, s_2, s_3, s_4, ... los segmentos que éstas determinan sobre r y r' son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=k$$

Ejemplo ▸ Observa la figura y comprueba el teorema de Tales.

Los segmentos AA', BB', y CC' son paralelos. Para comprobar el teorema de Tales se calculan las razones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\sqrt{40}}{6}=\frac{\cancel{2}\sqrt{10}}{\cancel{2}\cdot 3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{\sqrt{90}}{9}=\frac{\cancel{3}\sqrt{10}}{\cancel{3}\cdot 3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

GeoGebra

Entra en Saviadigital.com y aplica el teorema de Tales.

Triángulos en posición de Tales

Dos triángulos están en **posición de Tales** cuando comparten un vértice y los lados opuestos a este vértice son paralelos.

Los triángulos en posición de Tales son semejantes, por tanto:

$$\hat{A}=\hat{A'},\quad \hat{B}=\hat{B'},\quad \hat{C}=\hat{C'},\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Ten en cuenta

Dos triángulos en posición de Tales también pueden tener invertida la orientación.

ACTIVIDADES

1. Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante a otro que tiene por lados 3, 12 y 10 cm si la razón de semejanza es $k=\frac{16}{5}$.

ACTIVIDAD RESUELTA

2. Calcula la longitud de los lados desconocidos.

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene: $x=\sqrt{3^2+4^2}=5$ cm.

Como el vértice A es compartido y los segmentos BC y $B'C'$ son paralelos, los triángulos están en posición de Tales y, por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{4}{z}\Rightarrow z=\frac{8}{3}\text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{x}{y}\Rightarrow y=\frac{2x}{3}=\frac{10}{3}\text{ cm}$$

3. Calcula los lados desconocidos de las figuras.

a)

b)

4. Juan mide 1,75 m y proyecta, en un momento dado, una sombra de 1,4 m. Calcula la sombra que proyecta en ese instante una farola de 4 m de altura.

5. Calcula la distancia que debe recorrer un pájaro que quiere volar desde la copa del árbol A a la del B.

2 Criterios de semejanza de triángulos. Consecuencias

Sabías que...

El dibujante y pintor Crockett Johnson dedicó sus últimas obras a las matemáticas.

Entra en www.e-sm.net/... y fíjate en su cuadro *Triángulos semejantes*.

¿Cuántos triángulos semejantes ves?

A partir del teorema de Tales y las características del triángulo, se definen tres criterios que permiten deducir si dos triángulos son semejantes.

- **Criterio 1.** Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
- **Criterio 2.** Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
- **Criterio 3.** Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales.

Para demostrar el criterio 1, se parte de dos triángulos con dos ángulos iguales $\hat{A}$ y ... y se prueba que los tres ángulos son iguales y los tres lados homólogos son proporcionales.

- **Los tres ángulos son iguales.**

Como $\hat{A}=\hat{A}'$ y $\hat{B}=\hat{B}'$, se comprueba que $\hat{C}=\hat{C}'$:

$$\hat{C}=180^\circ-\hat{A}-\hat{B}=180^\circ-\hat{A}'-\hat{B}'=\hat{C}'\Rightarrow\hat{C}=\hat{C}'$$

- **Los tres lados homólogos son proporcionales.**

Sobre el lado AB del primer triángulo se lleva la medida $A'B'$ del segundo y se marca el vértice B''. Se traza el segmento $B''C''$, paralelo a BC.

Los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son iguales, ya que tienen dos de sus ángulos y un lado ... son iguales.

Los triángulos ABC y $AB''C''$ están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

Por tanto, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y sus lados son proporcionales.

Ejemplo [illegible]. ¿Son semejantes los triángulos de la figura?

En el segundo triángulo se cumple:

$$\hat{A}'=180^\circ-\hat{B}'-\hat{C}'=90^\circ$$

Luego es un triángulo rectángulo de hipotenusa $5\sqrt{2}$...

Como tiene dos ángulos iguales, sus catetos son iguales, y por el teorema de Pitágoras se tiene:

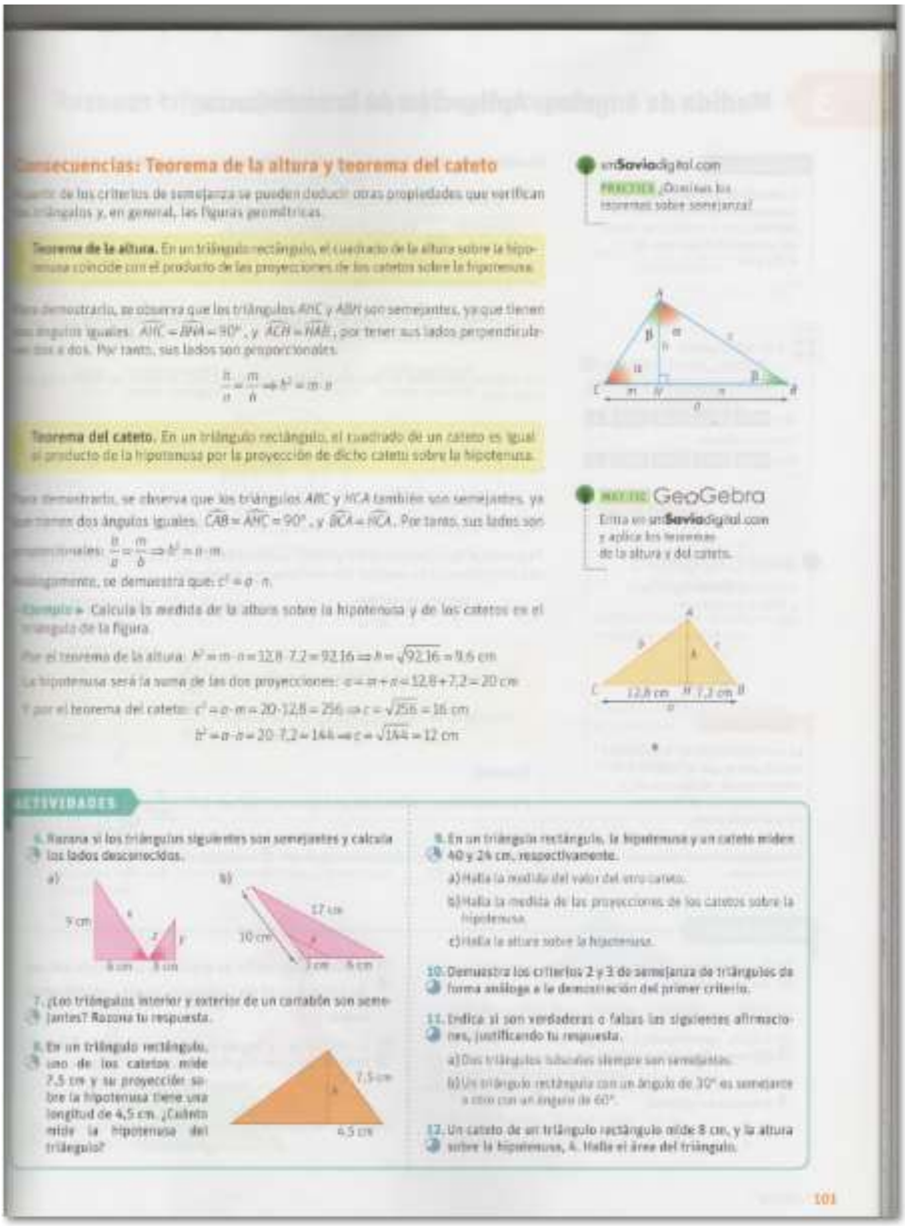
$$\overline{A'C'}^2+\overline{A'B'}^2=\overline{B'C'}^2 \xrightarrow{\overline{B'C'}^2=50} 2\,\overline{A'C'}^2=50\Rightarrow\overline{A'C'}=5$$

Los triángulos tienen dos lados proporcionales: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\dfrac{3}{5}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

Como el ángulo comprendido entre ellos es igual ($\hat{A}=\hat{A}'$), se puede aplicar el segundo criterio y concluir que son triángulos semejantes.

PRÁCTICA Más aplicaciones de la semejanza de triángulos.

100 UNIDAD 5



Consecuencias: Teorema de la altura y teorema del cateto

A partir de los criterios de semejanza se pueden deducir otras propiedades que verifican los triángulos y, en general, las figuras geométricas.

Teorema de la altura. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa coincide con el producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

Para demostrarlo, se observa que los triángulos AHC y ABH son semejantes, ya que tienen dos ángulos iguales: $\widehat{AHC} = \widehat{BHA} = 90^\circ$, y $\widehat{ACH} = \widehat{HAB}$, por tener sus lados perpendiculares dos a dos. Por tanto, sus lados son proporcionales.

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Teorema del cateto. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

Para demostrarlo, se observa que los triángulos ABC y HCA también son semejantes, ya que tienen dos ángulos iguales: $\widehat{CAB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$, y $\widehat{BCA} = \widehat{HCA}$. Por tanto, sus lados son proporcionales: $\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$.

Análogamente, se demuestra que: $c^2 = a \cdot n$.

Ejemplo ▸ Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y de los catetos en el triángulo de la figura.

Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 12{,}8 \cdot 7{,}2 = 92{,}16 \Rightarrow h = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6$ cm

La hipotenusa será la suma de las dos proyecciones: $a = m + n = 12{,}8 + 7{,}2 = 20$ cm

Y por el teorema del cateto: $c^2 = a \cdot m = 20 \cdot 12{,}8 = 256 \Rightarrow c = \sqrt{256} = 16$ cm

$b^2 = a \cdot n = 20 \cdot 7{,}2 = 144 \Rightarrow c = \sqrt{144} = 12$ cm

enSaviadigital.com
PRACTICA ¿Dominas los teoremas sobre semejanza?

GeoGebra
Entra en enSaviadigital.com y aplica los teoremas de la altura y del cateto.

ACTIVIDADES

6. Razona si los triángulos siguientes son semejantes y calcula los lados desconocidos.

a) 9 cm, 6 cm, 3 cm

b) 17 cm, 10 cm, 3 cm, 6 cm

7. ¿Los triángulos interior y exterior de un cartabón son semejantes? Razona tu respuesta.

8. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 7,5 cm y su proyección sobre la hipotenusa tiene una longitud de 4,5 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo?

9. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa y un cateto miden 40 y 24 cm, respectivamente.

a) Halla la medida del valor del otro cateto.

b) Halla la medida de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

c) Halla la altura sobre la hipotenusa.

10. Demuestra los criterios 2 y 3 de semejanza de triángulos de forma análoga a la demostración del primer criterio.

11. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando tu respuesta.

a) Dos triángulos isósceles siempre son semejantes.

b) Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° es semejante a otro con un ángulo de 60°.

12. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 8 cm, y la altura sobre la hipotenusa, 6. Halla el área del triángulo.

101

3 Medida de ángulos: Aplicación de la semejanza

Sabías que...

El sistema de medida sexagesimal, que se utiliza para medir tanto los ángulos como el tiempo, fue ideado por los sumerios hace más de 4000 años.

Con calculadora

La calculadora científica trabaja tanto en grados sexagesimales:

Deg: MODE MODE MODE MODE 1

como en radianes:

Rad: MODE MODE MODE MODE 2

GeoGebra

Entra en un**Savia**digital.com y trabaja con radianes.

Ten en cuenta

La ventaja principal en la utilización de radianes es que se trata de una unidad natural: no depende de un número arbitrario de divisiones de la circunferencia.

El radián es la unidad de medida de ángulos planos en el Sistema Internacional.

Los ángulos se pueden medir en **grados sexagesimales** o en **radianes**.

Un **grado sexagesimal** (1°) es la medida del ángulo central correspondiente al arc[o] de longitud $\frac{1}{360}$ de una circunferencia completa.

Cada grado sexagesimal se divide en 60 minutos (60'), y cada minuto, en 60 segundos (60'')

Un **radián** (1 rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuyo arc[o] coincide con la longitud del radio.

Los ángulos marcados en las circunferencias miden 1 rad, es decir, su radio y su arc[o] coinciden.

Para realizar la conversión entre grados y radianes se calcula cuántos radianes caben [en] una circunferencia de longitud $2\pi r$ mediante una proporción:

$$\frac{1 \text{ radián}}{r} = \frac{x \text{ radianes}}{2\pi r} \Rightarrow x = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 360° = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 180° = \pi \text{ rad}$$

- Para pasar de grados a radianes se multiplica por $\frac{\pi}{180°}$.
- Para pasar de radianes a grados se multiplica por $\frac{180°}{\pi}$.

Ejemplos

- La amplitud en radianes de un ángulo de 135° es: $135° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{3\pi}{4}$ rad.
- La amplitud en grados de un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$ radianes es: $\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180°}{\pi} = 150°$.

ACTIVIDADES

13. Pasa a radianes los siguientes ángulos expresados en grados sexagesimales.
 a) 60° b) 120° c) 210° d) 135° e) 330°

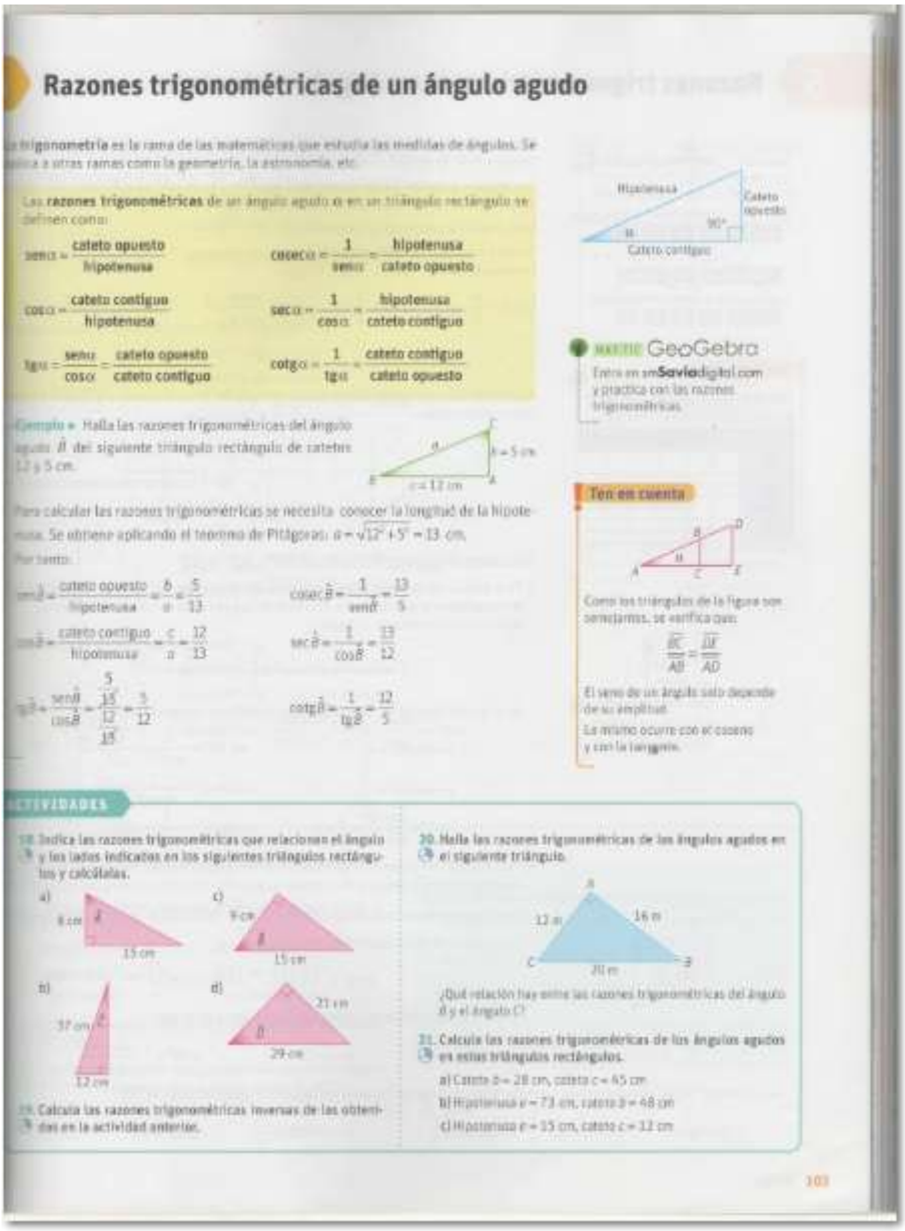
14. Calcula, aproximando a los segundos, la medida de un radián en grados sexagesimales.

15. Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos expresados en radianes.
 a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{2\pi}{3}$ e) 4π

16. Las medidas de dos de los ángulos de un triángulo ABC son $\hat{A} = 40°$ y $\hat{B} = 1{,}54$ rad. Calcula en grados y en radianes la medida de $\hat{C}$.

17. La medida de un ángulo de un paralelogramo es $\hat{A} = 65°$. Halla los otros tres ángulos en grados y en radianes.

102 UNIDAD 5



Razones trigonométricas de un ángulo agudo

La **trigonometría** es la rama de las matemáticas que estudia las medidas de ángulos. Se aplica a otras ramas como la geometría, la astronomía, etc.

Las **razones trigonométricas** de un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo se definen como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

Hipotenusa, Cateto opuesto, 90°, α, Cateto contiguo

MATETIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y practica con las razones trigonométricas.

Ejemplo ▸ Halla las razones trigonométricas del ángulo agudo $\hat{B}$ del siguiente triángulo rectángulo de catetos 12 y 5 cm.

a, $b = 5$ cm, $c = 12$ cm

Para calcular las razones trigonométricas se necesita conocer la longitud de la hipotenusa. Se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm.

Por tanto:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{5}{13} \qquad \operatorname{cosec}\hat{B} = \frac{1}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{13}{5}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \qquad \sec\hat{B} = \frac{1}{\cos\hat{B}} = \frac{13}{12}$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} \qquad \operatorname{cotg}\hat{B} = \frac{1}{\operatorname{tg}\hat{B}} = \frac{12}{5}$$

Ten en cuenta

Como los triángulos de la figura son semejantes, se verifica que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

El seno de un ángulo solo depende de su amplitud.

Lo mismo ocurre con el coseno y con la tangente.

ACTIVIDADES

18. Indica las razones trigonométricas que relacionan el ángulo y los lados indicados en los siguientes triángulos rectángulos y calcúlalas.

a) 8 cm, 15 cm b) 37 cm, 12 cm c) 9 cm, 15 cm d) 21 cm, 29 cm

19. Calcula las razones trigonométricas inversas de las obtenidas en la actividad anterior.

20. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos en el siguiente triángulo.

12 m, 16 m, 20 m

¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$ y el ángulo $\hat{C}$?

21. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos en estos triángulos rectángulos.

a) Cateto $b = 28$ cm, cateto $c = 45$ cm

b) Hipotenusa $a = 73$ cm, cateto $b = 48$ cm

c) Hipotenusa $a = 15$ cm, cateto $c = 12$ cm

103

5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Para representar ángulos se puede utilizar la **circunferencia goniométrica**, de cent
origen y radio la unidad. El plano queda dividido en cuatro cuadrantes.

Los ángulos se miden desde el semieje X positivo y en el sentido contrario a las ag
del reloj. Si se miden en el sentido de las agujas del reloj, los ángulos son negativos

Cada ángulo α determina un punto $A(x, y)$.

El radio y las coordenadas del punto forman un triángulo rectángulo donde:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$$

A partir de esta representación se deduce el signo del seno, el coseno y la tangente e
cuatro cuadrantes.

Ten en cuenta

Valores del seno, coseno y la tangente en las divisiones entre cuadrantes

α	sen α	cos α	tg α
0°	0	1	0
90°	1	0	−
180°	0	−1	0
270°	−1	0	−

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

- Para deducir las **razones trigonométricas del ángulo de 45°**, se traza el ángulo s
la circunferencia goniométrica. El triángulo que se forma es isósceles, con $x = y$.
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$1 = x^2 + y^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En el primer cuadrante, las razones trigonométricas son positivas:

$$x = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{cosec} 45° = \frac{1}{\operatorname{sen} 45°} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} = \frac{x}{y} = 1 \qquad \operatorname{cotg} 45° = \frac{1}{\operatorname{tg} 45°} = 1$$

- Para calcular las **razones trigonométricas del ángulo de 30°**, se traza el ángulo
opuesto. Los dos triángulos rectángulos que resultan forman un triángulo equiláte
lado 1, de donde se deduce que $y = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$. Aplicando el teorema de Pitágor
triángulo rectángulo superior se obtiene:

$$1 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4} = x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

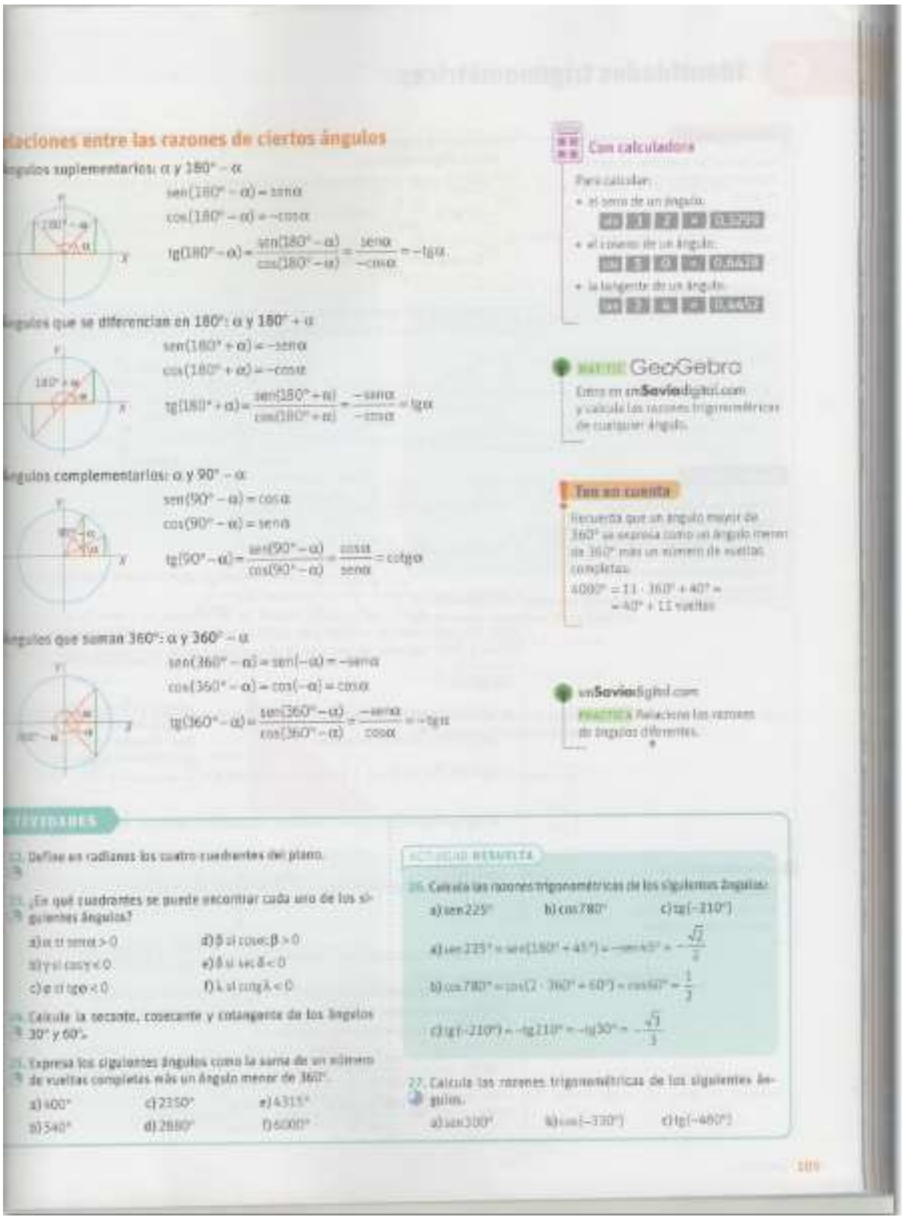
Como el ángulo está en el primer cuadrante, las razones son:

$$x = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

De forma análoga se deducen las **razones trigonométricas de 60°**:

$$x = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad y = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

106 UNIDAD 5



...laciones entre las razones de ciertos ángulos

...gulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

...gulos que se diferencian en 180°: α y $180^\circ + \alpha$

$$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

...gulos complementarios: α y $90^\circ - \alpha$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$$

...gulos que suman 360°: α y $360^\circ - \alpha$

$$\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

Con calculadora

Para calcular:
- el seno de un ángulo:
- el coseno de un ángulo:
- la tangente de un ángulo:

GeoGebra

Entra en *unSaviadigital.com* y calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

Ten en cuenta

Recuerda que un ángulo mayor de 360° se expresa como un ángulo menor de 360° más un número de vueltas completas.

$4000^\circ = 11 \cdot 360^\circ + 40^\circ =$
$= 40^\circ + 11$ vueltas

unSaviadigital.com

PRÁCTICA Relaciona las razones de ángulos diferentes.

...TIVIDADES

Define en radianes los cuatro cuadrantes del plano.

¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α si $\operatorname{sen}\alpha > 0$ | d) β si $\operatorname{cosec}\beta > 0$
b) γ si $\cos\gamma < 0$ | e) δ si $\sec\delta < 0$
c) φ si $\operatorname{tg}\varphi < 0$ | f) λ si $\operatorname{cotg}\lambda < 0$

Calcula la secante, cosecante y cotangente de los ángulos 30° y 60°.

Expresa los siguientes ángulos como la suma de un número de vueltas completas más un ángulo menor de 360°.

a) 400° c) 2350° e) 4315°
b) 540° d) 2880° f) 6000°

ACTIVIDAD RESUELTA

26. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) sen 225° b) cos 780° c) tg(−210°)

a) $\operatorname{sen}225^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{sen}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 780^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}(-210^\circ) = -\operatorname{tg}210^\circ = -\operatorname{tg}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

27. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) sen 300° b) cos(−330°) c) tg(−400°)

109

6 Identidades trigonométricas

Ten en cuenta

Para indicar las potencias de razones trigonométricas se utiliza la siguiente notación:

$(\operatorname{sen}\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$

$(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

$(\operatorname{tg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha$

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo α verifican las siguientes **identidades trigonométricas**.

- $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. llamada ecuación fundamental de la trigonometría.
- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$
- $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$

Para demostrar las identidades anteriores, basta aplicar las definiciones de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y utilizar el teorema de Pitágoras.

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{h}$ $\quad \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{h}{y}$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{h}$ $\quad \sec\alpha = \dfrac{h}{x}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\quad \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{x}{y}$

- $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{y^2}{h^2} + \dfrac{x^2}{h^2} = \dfrac{y^2+x^2}{h^2} = \dfrac{h^2}{h^2} = 1$
- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2} = \dfrac{h^2}{x^2} = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = 1 + \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{y^2} = \dfrac{h^2}{y^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

Sabías que...

La ecuación fundamental de la trigonometría también se llama **identidad pitagórica** porque en un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, es equivalente al teorema de Pitágoras.

Estas tres relaciones se utilizan para calcular todas las razones trigonométricas de un ángulo a partir del valor de una sola de ellas y para probar identidades trigonométricas.

Ejemplos

- Calcula las razones trigonométricas del ángulo α si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{4}$, donde $0 < \alpha < 90°$.

  Se utiliza la primera relación:

  $$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

  Al ser el ángulo del primer cuadrante, el coseno es positivo. $\cos\alpha = +\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

  Por tanto, la tangente es: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{15}}{\cancel{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

  El resto de las razones son: $\operatorname{cosec}\alpha = 4$, $\sec\alpha = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$ y $\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{15}$

- Demuestra la identidad trigonométrica $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$.

  Para demostrar una igualdad matemática, se puede partir de uno de los miembros y mediante transformaciones llegar al otro.

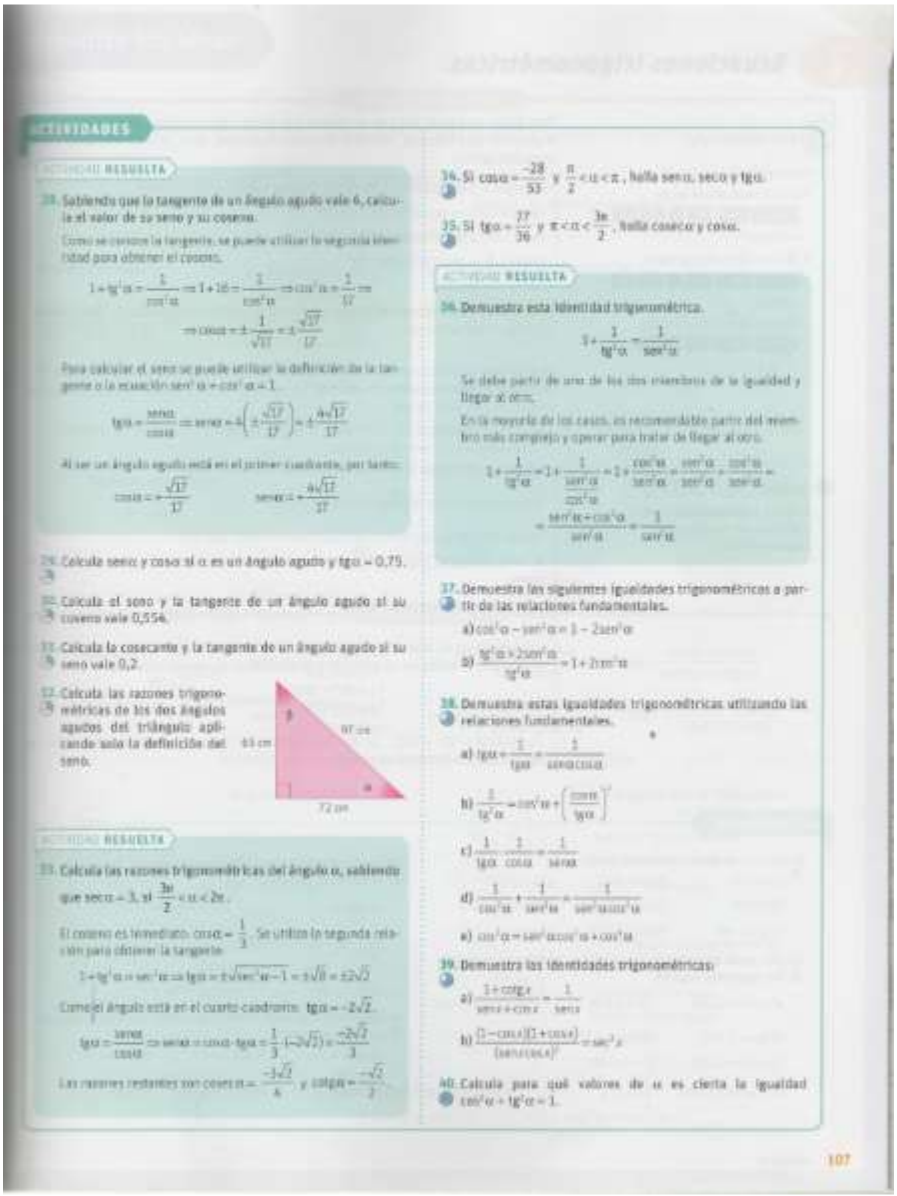
  $$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha\underbrace{(1-\cos^2\alpha)}_{1-\cos^2\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha}}{\cos^2\alpha}$$

  $$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$$

smSaviadigital.com

PRACTICA Comprueba lo que has aprendido sobre razones trigonométricas.

108 UNIDAD 5



ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

28. Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo vale 4, calcula el valor de su seno y su coseno.

Como se conoce la tangente, se puede utilizar la segunda identidad para obtener el coseno.

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+16=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{17}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}=\pm\frac{\sqrt{17}}{17}$$

Para calcular el seno se puede utilizar la definición de la tangente o la ecuación $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$tg\alpha=\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \text{sen}\alpha=4\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{17}\right)=\pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

Al ser un ángulo agudo está en el primer cuadrante, por tanto:

$$\cos\alpha=+\frac{\sqrt{17}}{17} \qquad \text{sen}\alpha=+\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

29. Calcula sen α y cos α si α es un ángulo agudo y tg α = 0,75.

30. Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo si su coseno vale 0,556.

31. Calcula la cosecante y la tangente de un ángulo agudo si su seno vale 0,2.

32. Calcula las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos del triángulo aplicando solo la definición del seno.

ACTIVIDAD RESUELTA

33. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α, sabiendo que sec α = 3, si $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

El coseno es inmediato: $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Se utiliza la segunda relación para obtener la tangente.

$$1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha\Rightarrow tg\alpha=\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$$

Como el ángulo está en el cuarto cuadrante: $tg\alpha=-2\sqrt{2}$.

$$tg\alpha=\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \text{sen}\alpha=\cos\alpha\cdot tg\alpha=\frac{1}{3}\cdot(-2\sqrt{2})=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

Las razones restantes son $\text{cosec}\,\alpha=\frac{-3\sqrt{2}}{4}$ y $\text{cotg}\,\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{4}$.

34. Si $\cos\alpha=\frac{-28}{53}$ y $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, halla sen α, sec α y tg α.

35. Si $tg\alpha=\frac{77}{36}$ y $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, halla cosec α y cos α.

ACTIVIDAD RESUELTA

36. Demuestra esta identidad trigonométrica.

$$1+\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

Se debe partir de uno de los dos miembros de la igualdad y llegar al otro.

En la mayoría de los casos, es recomendable partir del miembro más complejo y operar para tratar de llegar al otro.

$$1+\frac{1}{tg^2\alpha}=1+\frac{1}{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=1+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}=$$
$$=\frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

37. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las relaciones fundamentales.

a) $\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=1-2\text{sen}^2\alpha$

b) $\frac{tg^2\alpha+2\text{sen}^2\alpha}{tg^2\alpha}=1+2\cos^2\alpha$

38. Demuestra estas igualdades trigonométricas utilizando las relaciones fundamentales.

a) $tg\alpha+\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}$

b) $\frac{1}{tg^2\alpha}=\cos^2\alpha+\left(\frac{\cos\alpha}{tg\alpha}\right)^2$

c) $\frac{1}{tg\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\text{sen}\alpha}$

d) $\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$

e) $\cos^2\alpha=\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

39. Demuestra las identidades trigonométricas.

a) $\frac{1+\text{cotg}\,x}{\text{sen}\,x+\cos x}=\frac{1}{\text{sen}\,x}$

b) $\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(\text{sen}\,x\cos x)^2}=\sec^2 x$

40. Calcula para qué valores de α es cierta la igualdad $\cos^2\alpha+tg^2\alpha=1$.

107

7 Ecuaciones trigonométricas

Con calculadora

Para calcular:

- el arco seno de una razón:
  SHIFT sin^{-1} 0 . 3 5 =
  = 20,487°
- el arco coseno de una razón:
  SHIFT cos^{-1} 0 . 7 5 =
  = 41,41°
- el arco tangente de una razón:
  SHIFT tan^{-1} 1 . 5 =
  = 56,31°

GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y practica con ecuaciones trigonométricas.

Para hallar un ángulo del que se conoce una razón trigonométrica se usan las razon trigonométricas inversas, llamadas **arco seno** (arcsen), **arco coseno** (arccos), y ar **tangente** (arctg).

Ejemplo » Observa el cálculo de los ángulos conocidas las razones.

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}35 \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\,0{,}35 = 20°\,29'$

$\cos\alpha = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}75 = 41°\,25'$

$\text{tg}\,\alpha = 1{,}5 \Rightarrow \text{arctg}\,1{,}5 = 56°\,19'$

Una **ecuación trigonométrica** es aquella en la que la incógnita forma parte de un razón trigonométrica.

Se resuelven hallando todos los ángulos positivos menores de 360° que la verifican. Pa incluir los ángulos mayores de 360° se les suma el número de vueltas completas. L soluciones son de la forma:

$$x = \alpha + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo » Resuelve la ecuación trigonométrica $3\,\text{tg}\,x = \sqrt{3}$.

Se despeja la razón trigonométrica: $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Se escriben todas las soluciones positivas menores que 360°.

Al ser la tangente positiva, el ángulo x puede estar en los cuadrantes 1.º o 3.º, p tanto,

$$x = \text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° \\ x = 30° + 180° = 210° \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son las anteriores más cualquier número de vueltas co pletas. Con la ayuda de un parámetro se establecen dichas soluciones.

$$\begin{cases} x = 30° + 360°k \\ x = 210° + 360°k \end{cases} \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

Como $210° = 30° + 180°$, las dos familias de soluciones se pueden escribir como u sola: $x = 30° + 180°k$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

ACTIVIDADES

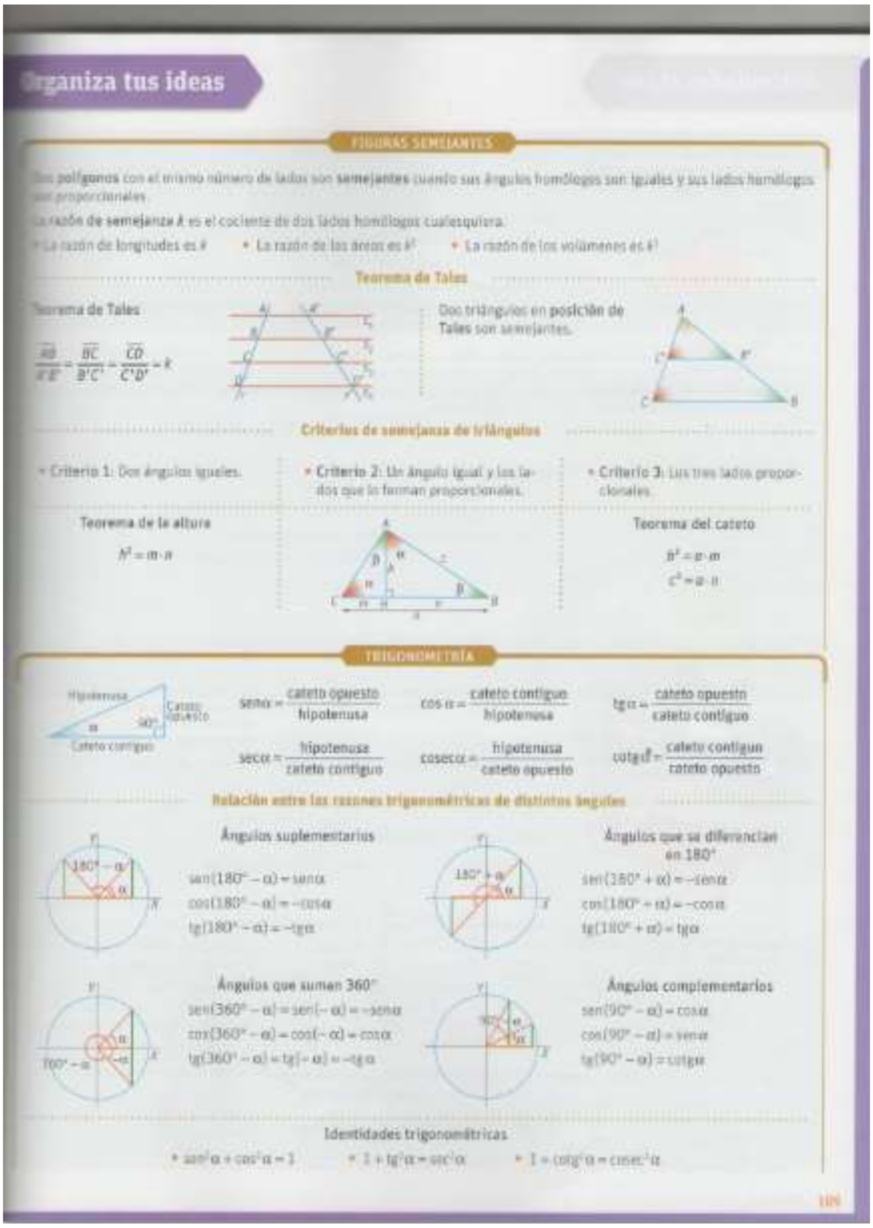
41. Con ayuda de la calculadora, halla:
    a) sen 43° d) $\cos(-54°)$ g) arctg 0,25
    b) cos 33° e) arcsen 0,16 h) $\arccos(-0{,}23)$
    c) tg 2,5 rad f) arccos 0,99 i) arcsen 1

42. Con ayuda de la calculadora, halla las medidas en grados de los siguientes ángulos.
    a) $\cos\alpha = 0{,}129$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
    b) $\text{tg}\,\alpha = 2{,}310$; $180° < \alpha < 270°$
    c) $\sec\alpha = 1{,}305$; $0° < \alpha < 90°$
    d) $\text{cosec}\,\alpha = 1{,}035$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

43. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. *Expresa los re- sultados en radianes.*
    a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ d) $\sec x = -1$
    b) $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\text{cosec}\,x = -2$
    c) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$ f) $\text{cotg}\,x = 1$

44. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los re- sultados en grados.
    a) $\text{sen}\,x = 1$ c) $\text{tg}\,x = -\sqrt{3}$ e) $\sec x = \sqrt{2}$
    b) $\cos x = -1$ d) $\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ f) $\text{sen}\,x + \frac{1}{2} = 1$

108 UNIDAD 5



Organiza tus ideas

FIGURAS SEMEJANTES

Dos **polígonos** con el mismo número de lados son **semejantes** cuando sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

La **razón de semejanza** k es el cociente de dos lados homólogos cualesquiera.

- La razón de longitudes es k
- La razón de las áreas es k^2
- La razón de los volúmenes es k^3

Teorema de Tales

Teorema de Tales

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = k$$

Dos triángulos en **posición de Tales** son semejantes.

Criterios de semejanza de triángulos

- **Criterio 1:** Dos ángulos iguales.
- **Criterio 2:** Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales.
- **Criterio 3:** Los tres lados proporcionales.

Teorema de la altura

$$h^2 = m \cdot n$$

Teorema del cateto

$$b^2 = a \cdot m$$
$$c^2 = a \cdot n$$

TRIGONOMETRÍA

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

Relación entre las razones trigonométricas de distintos ángulos

Ángulos suplementarios

$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Ángulos que se diferencian en 180°

$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Ángulos que suman 360°

$\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

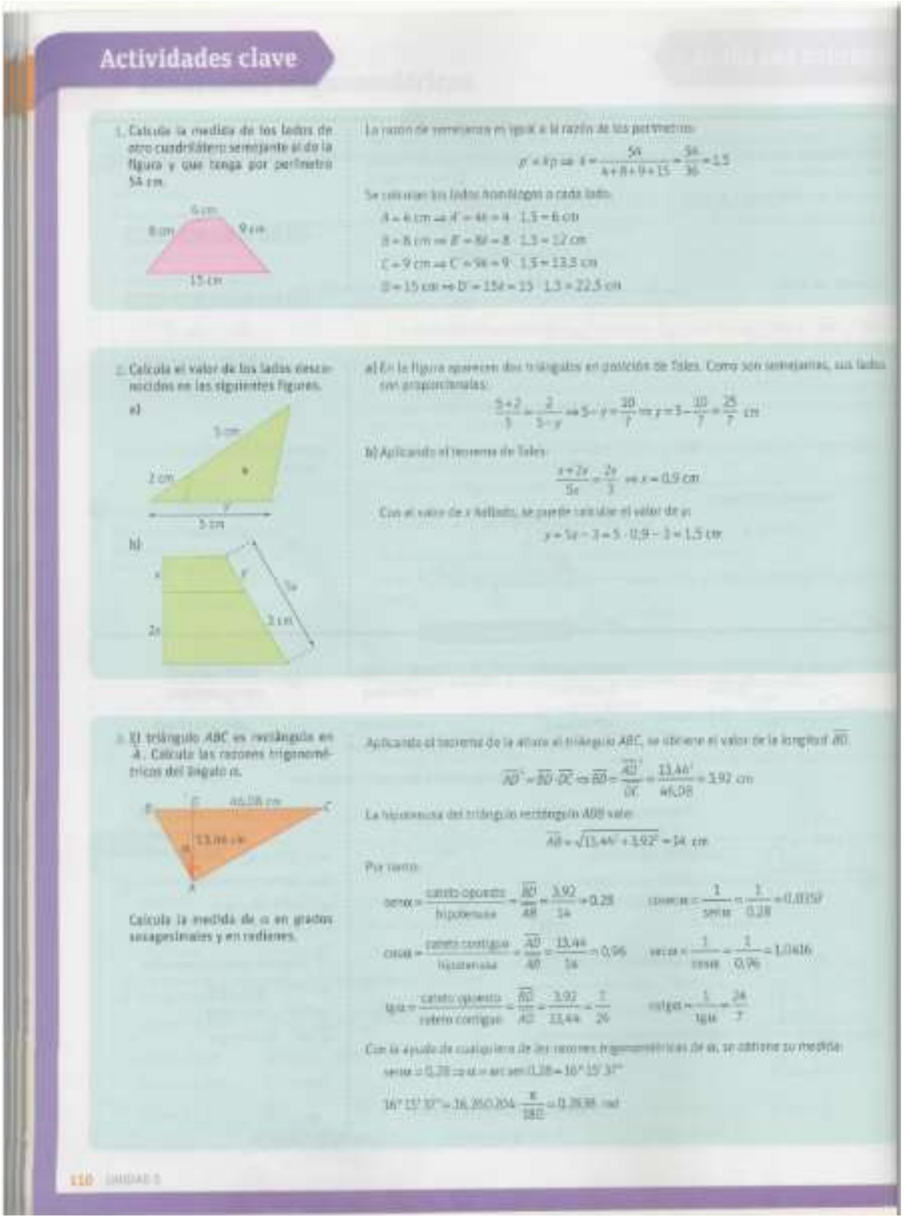
Ángulos complementarios

$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

Identidades trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

109



Actividades clave

1. Calcula la medida de los lados de otro cuadrilátero semejante al de la figura y que tenga por perímetro 54 cm.

La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros:

$$p' = kp \Rightarrow k = \frac{54}{6+8+9+15} = \frac{54}{36} = 1{,}5$$

Se calculan los lados homólogos a cada lado:

$A = 6\text{ cm} \Rightarrow A' = 6k = 6 \cdot 1{,}5 = 9\text{ cm}$

$B = 8\text{ cm} \Rightarrow B' = 8k = 8 \cdot 1{,}5 = 12\text{ cm}$

$C = 9\text{ cm} \Rightarrow C' = 9k = 9 \cdot 1{,}5 = 13{,}5\text{ cm}$

$D = 15\text{ cm} \Rightarrow D' = 15k = 15 \cdot 1{,}5 = 22{,}5\text{ cm}$

2. Calcula el valor de los lados desconocidos en las siguientes figuras.

a)

b)

a) En la figura aparecen dos triángulos en posición de Tales. Como son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{5+2}{5} = \frac{2}{5-y} \Rightarrow 5-y = \frac{10}{7} \Rightarrow y = 5 - \frac{10}{7} = \frac{25}{7}\text{ cm}$$

b) Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{x+2x}{5x} = \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 0{,}9\text{ cm}$$

Con el valor de x hallado, se puede calcular el valor de y:

$$y = 5x - 3 = 5 \cdot 0{,}9 - 3 = 1{,}5\text{ cm}$$

3. El triángulo ABC es rectángulo en $\hat{A}$. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.

Calcula la medida de α en grados sexagesimales y en radianes.

Aplicando el teorema de la altura al triángulo ABC, se obtiene el valor de la longitud $\overline{BD}$.

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{DC}} = \frac{13{,}44^2}{46{,}08} = 3{,}92\text{ cm}$$

La hipotenusa del triángulo rectángulo ABD vale:

$$\overline{AB} = \sqrt{13{,}44^2 + 3{,}92^2} = 14\text{ cm}$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{3{,}92}{14} = 0{,}28 \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{0{,}28} = 0{,}0357$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{13{,}44}{14} = 0{,}96 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{0{,}96} = 1{,}0416$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{3{,}92}{13{,}44} = \frac{7}{24} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{24}{7}$$

Con la ayuda de cualquiera de las razones trigonométricas de α, se obtiene su medida:

$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}28 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen} 0{,}28 = 16°\,15'\,37''$

$$16°\,15'\,37'' = 16{,}260\,204 \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}2838\text{ rad}$$

110 UNIDAD 5

Simplifica todo lo que puedas la expresión trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{tg} x - 1}$$

Se expresan todas las razones trigonométricas en función del seno y del coseno y se opera.

$$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1} = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x}} = \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)\cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \cos x$$

Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica.

$$2\operatorname{sen}(3x - 60^\circ) = 1$$

Se despeja la razón trigonométrica y se calculan todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican las igualdades obtenidas.

$$2\operatorname{sen}(3x - 60^\circ) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(3x - 60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x - 60^\circ = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 60^\circ = 30^\circ \\ 3x - 60^\circ = 150^\circ \end{cases}$$

Sumando o restando cualquier número de vueltas:

- $3x - 60^\circ = 30^\circ + 360^\circ k$
- $3x - 60^\circ = 150^\circ + 360^\circ k$

Despejando el valor de x en cada una de las expresiones, se obtienen todas las soluciones de la ecuación inicial:

- $x = \frac{30^\circ + 60^\circ + 360^\circ k}{3} = 30^\circ + 120^\circ k$
- $x = \frac{150^\circ + 60^\circ + 360^\circ k}{3} = 70^\circ + 120^\circ k$

Un edificio de cinco plantas de igual altura proyecta, en un cierto instante, una sombra de 22 m. Calcula la altura de cada planta si se sabe que en ese mismo momento una farola de 3 m de altura proyecta una sombra de 4,5 m.

En un mismo instante, los rayos del Sol tienen la misma inclinación y, por tanto, los triángulos rectángulos cuyos catetos son las alturas y las sombras son semejantes.

En consecuencia:

$$\frac{h}{3} = \frac{22}{4{,}5} \Rightarrow h = \frac{22 \cdot 3}{4{,}5} = 14{,}67 \text{ m}$$

Cada planta medirá:

$$\frac{14{,}67}{5} = 2{,}93 \text{ m}$$

En la figura aparecen dos circunferencias de radios $\overline{AP} = 15$ cm y $\overline{BQ} = 3$ cm. Calcula la distancia $\overline{PQ}$ que separa a sus centros sabiendo que la distancia entre los puntos de tangencia A y B es $\overline{AB} = 20$ cm.

Los triángulos OPA y OQB son rectángulos por ser el radio perpendicular a la recta tangente y son semejantes por estar en posición de Tales. Por tanto:

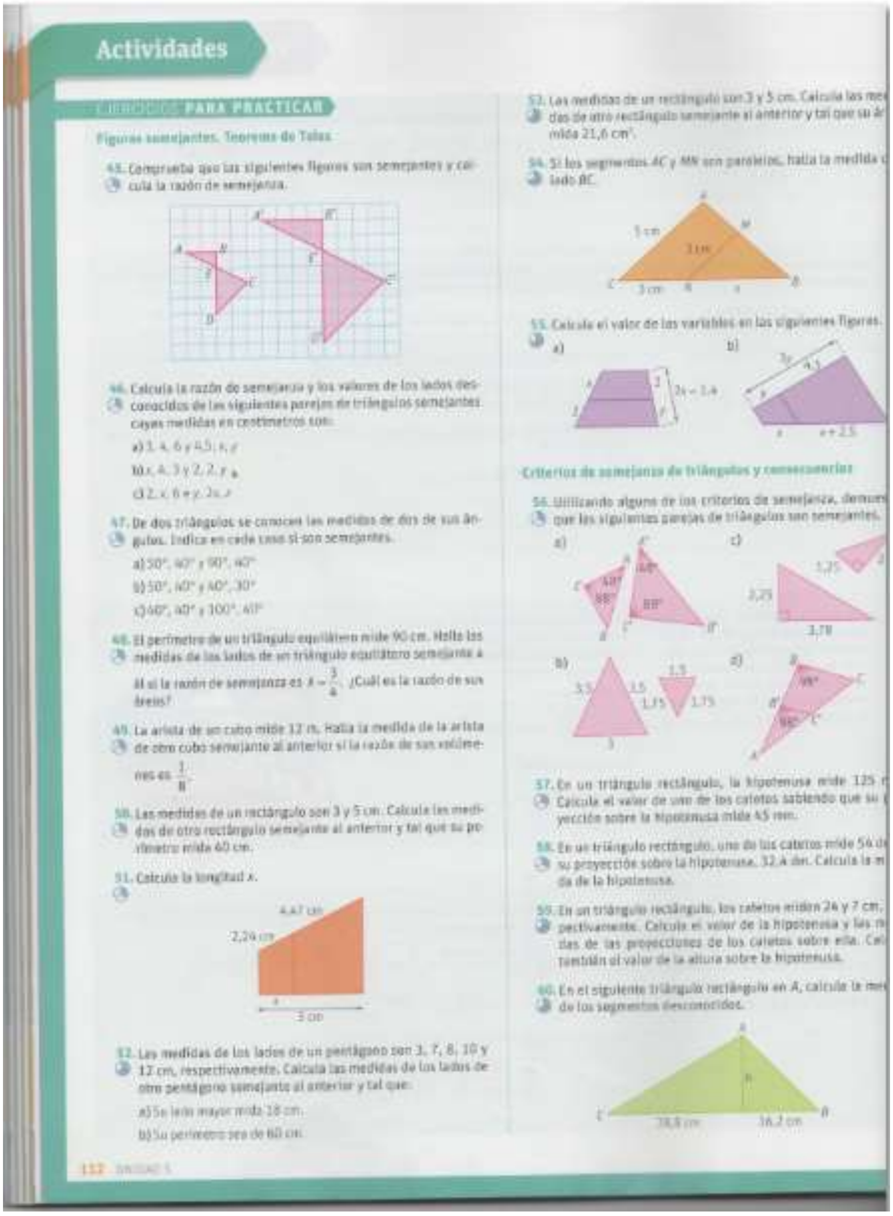
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BQ}} \Rightarrow \frac{\overline{OB} + \overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BQ}} \Rightarrow \frac{\overline{OB} + 20}{15} = \frac{\overline{OB}}{3} \Rightarrow 3\overline{OB} + 60 = 15\overline{OB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\overline{OB} = 60 \Rightarrow \overline{OB} = \frac{60}{12} = 5 \text{ cm}$$

Aplicando otra vez el teorema de Tales a los triángulos semejantes OPA y OQB:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{20}{\overline{PQ}} = \frac{5}{\sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BQ}^2}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{20\sqrt{5^2 + 3^2}}{5} = 4\sqrt{34} \text{ cm}$$

111



Actividades

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Figuras semejantes. Teorema de Tales

45. Comprueba que las siguientes figuras son semejantes y calcula la razón de semejanza.

46. Calcula la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos de las siguientes parejas de triángulos semejantes cuyas medidas en centímetros son:

a) 3, 4, 6 y 4,5; x, y

b) x, 4, 3 y 2, 2, y

c) 2, x, 6 e y, 2x, z

47. De dos triángulos se conocen las medidas de dos de sus ángulos. Indica en cada caso si son semejantes.

a) 50°, 40° y 90°, 40°

b) 50°, 40° y 40°, 30°

c) 60°, 40° y 100°, 40°

48. El perímetro de un triángulo equilátero mide 90 cm. Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{3}{4}$. ¿Cuál es la razón de sus áreas?

49. La arista de un cubo mide 12 m. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante al anterior si la razón de sus volúmenes es $\frac{1}{8}$.

50. Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su perímetro mida 40 cm.

51. Calcula la longitud x.

52. Las medidas de los lados de un pentágono son 3, 7, 8, 10 y 12 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los lados de otro pentágono semejante al anterior y tal que:

a) Su lado mayor mida 18 cm.

b) Su perímetro sea de 60 cm.

53. Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 cm. Calcula las me… das de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su ár… mida 21,6 cm².

54. Si los segmentos AC y MN son paralelos, halla la medida d… lado BC.

55. Calcula el valor de las variables en las siguientes figuras.

a) b)

Criterios de semejanza de triángulos y consecuencias

56. Utilizando alguno de los criterios de semejanza, demues… que las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

a) b) c) d)

57. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 125 … Calcula el valor de uno de los catetos sabiendo que su … yección sobre la hipotenusa mide 45 mm.

58. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 54 d… su proyección sobre la hipotenusa, 32,4 dm. Calcula la m… da de la hipotenusa.

59. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 24 y 7 cm, … pectivamente. Calcula el valor de la hipotenusa y las m… das de las proyecciones de los catetos sobre ella. Cal… también el valor de la altura sobre la hipotenusa.

60. En el siguiente triángulo rectángulo en A, calcula la me… de los segmentos desconocidos.

112 UNIDAD 5

Medidas de ángulos

61. Expresa en radianes la medida de los siguientes ángulos.

a) 35° c) 125° e) 270°
b) 315° d) 225° f) 330°

62. Expresa en grados sexagesimales la medida de los siguientes ángulos dados en radianes.

a) 7π c) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{7\pi}{8}$ d) $\frac{4\pi}{3}$ f) $\frac{5\pi}{11}$

63. Expresa los siguientes ángulos como la suma de un ángulo positivo menor de 360° y un número entero de vueltas completas.

a) 650° c) 1520° e) 610°
b) 900° d) 3640° f) 1925°

64. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 2π radianes.

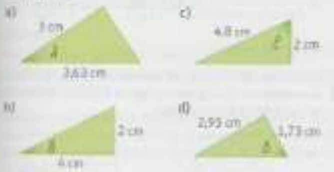
a) $\frac{23\pi}{4}$ b) $\frac{32\pi}{3}$ c) $\frac{51\pi}{2}$ d) 103π e) $\frac{375\pi}{6}$

Razones trigonométricas

65. Copia y completa la siguiente tabla.

Ángulo	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	●●●	●●●	●●●
Coseno	●●●	●●●	●●●
Tangente	●●●	●●●	●●●

66. Calcula las medidas de los ángulos indicados en los siguientes triángulos rectángulos. Da los resultados aproximando a los minutos.



67. La hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 y 16 dm, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas de su ángulo agudo de menor amplitud?

68. Con la ayuda de la calculadora, halla los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 67° c) cos 77° e) tg 39°
b) sen $\frac{\pi}{7}$ rad d) cos $\frac{2\pi}{5}$ rad f) tg $\frac{3\pi}{8}$ rad

69. ¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α si $\cos\alpha > 0$ c) β si $\operatorname{sen}\beta > 0$
b) γ si $\operatorname{tg}\gamma < 0$ d) δ si $\operatorname{cosec}\delta < 0$

70. Sin calcular su valor, indica el signo de las siguientes razones trigonométricas.

a) cos 123° d) cosec 256° g) tg 320°
b) sen 750° e) cotg 568° h) cos 130°
c) tg 2000° f) sec 580° i) sen 1223°

71. Expresa las razones trigonométricas de 70°, 160°, 200° y 340° en función de las de 20°.

72. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 120° e) cos 225° i) tg 330°
b) sen(−60°) f) cos(−150°) j) tg 150°
c) sen 510° g) cos 450° k) tg 420°
d) sen(−660°) h) cos(−300°) l) tg(−405°)

73. Con ayuda de la figura, indica las relaciones que se dan entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $90° + \alpha$.

Identidades y ecuaciones trigonométricas

ACTIVIDAD RESUELTA

74. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{37}$ y que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula $\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, y el coseno y la tangente son negativos.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{12}{37}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{1369} = \frac{1225}{1369} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1225}{1369}} = -\frac{35}{37}$$

La tangente es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{37} : \frac{-35}{37} = -\frac{12}{35}$$

75. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$.

76. Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno vale 0,75.

77. Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α cuya tangente es igual a $\sqrt{5}$.

113

Actividades

78. Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en grados sexagesimales de los siguientes ángulos agudos. Aproxima los resultados a los minutos.

a) $\operatorname{sen}\hat{A} = 0{,}125$ b) $\cos\hat{B} = 0{,}245$ c) $\operatorname{tg}\hat{C} = 1{,}25$

79. Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en radianes de los siguientes ángulos agudos. Expresa los resultados con tres cifras.

a) $\operatorname{sen}\hat{A} = 0{,}85$ b) $\cos\hat{B} = 0{,}645$ c) $\operatorname{tg}\hat{C} = 0{,}556$

80. Halla las razones trigonométricas restantes del ángulo α en cada caso.

a) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

b) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}75$ $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

81. Calcula las razones trigonométricas restantes del ángulo α en cada caso.

a) $\sec\alpha = -\frac{7}{4}$ $\quad 180° < \alpha < 270°$

b) $\operatorname{cosec}\alpha = -1{,}11$ $\quad 270° < \alpha < 360°$

82. Comprueba si existe un ángulo α tal que:

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}52$ y $\cos\alpha = 0{,}43$

b) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}483$ y $\sec\alpha = 1{,}789$

c) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}7071$ y $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}7002$

83. Si $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, y α es un ángulo agudo halla:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + 180°)$ c) $\cos(180° - \alpha)$

b) $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$ d) $\operatorname{sen}(-\alpha)$

ACTIVIDAD RESUELTA

84. Demuestra la identidad trigonométrica:

$$\frac{\cos\alpha - \sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{tg}^3\alpha$$

Se escriben todas las razones trigonométricas en función del seno y del coseno y se opera.

$$\frac{\cos\alpha - \sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\frac{-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha \cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \operatorname{tg}^3\alpha$$

85. Demuestra esta igualdad trigonométrica.

$$\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}}{1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

86. Demuestra las siguientes igualdades.

a) $\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \cos x$

b) $\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = 1$

87. Demuestra las identidades siguientes.

a) $\operatorname{tg}^2\alpha(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha$

b) $\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 1}{2} = \operatorname{sen}^2 x$

c) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$

88. Con ayuda de la calculadora, halla las medidas en ra[…] de los siguientes ángulos.

a) $\operatorname{sen}\hat{A} = 0{,}559$ $\quad \frac{\pi}{2} < \hat{A} < \pi$

b) $\cos\hat{B} = 0{,}775$ $\quad \frac{3\pi}{2} < \hat{B} < 2\pi$

c) $\operatorname{tg}\hat{C} = 1{,}5$ $\quad \pi < \hat{C} < \frac{3\pi}{2}$

89. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa […] sultados en radianes.

a) $\operatorname{tg} x = -2$ c) $\operatorname{sen} x = 0{,}81$

b) $1 - 5\cos x = 6$ d) $4\operatorname{sen} x + 1 = 0$

90. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa […] sultados en grados.

a) $\cos(3x - 40°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\operatorname{sen}(x + 100) = \sqrt{3}$

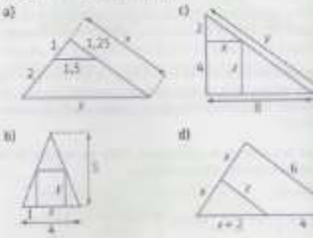
c) $\operatorname{tg}(4x - 25°) = 1$

91. Simplifica las expresiones trigonométricas:

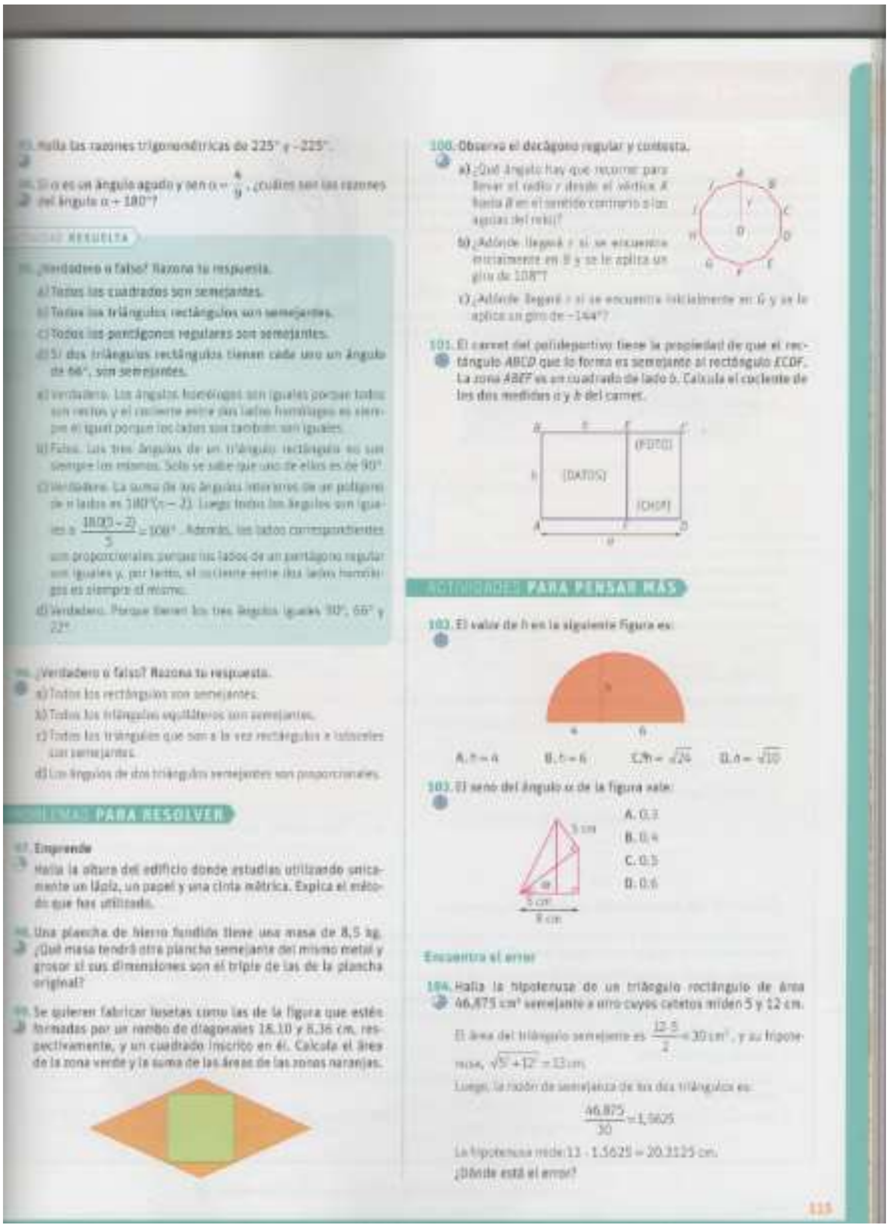
a) $\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$ b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ c) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

Actividades de síntesis

92. Utilizando los criterios de semejanza, encuentra triá[…] semejantes en las siguientes figuras y calcula las medi[…] los segmentos desconocidos.



116 UNIDAD 3



93. Halla las razones trigonométricas de 225° y −225°.

94. Si α es un ángulo agudo y sen $\alpha = \frac{4}{9}$, ¿cuáles son las razones del ángulo α + 180°?

ACTIVIDAD RESUELTA

95. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

a) Todos los cuadrados son semejantes.
b) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
c) Todos los pentágonos regulares son semejantes.
d) Si dos triángulos rectángulos tienen cada uno un ángulo de 66°, son semejantes.

a) Verdadero. Los ángulos homólogos son iguales porque todos son rectos y el cociente entre dos lados homólogos es siempre el igual porque los lados son también son iguales.
b) Falso. Los tres ángulos de un triángulo rectángulo no son siempre los mismos. Solo se sabe que uno de ellos es de 90°.
c) Verdadero. La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es 180°(n − 2). Luego todos los ángulos son iguales a $\frac{180(5-2)}{5} = 108°$. Además, los lados correspondientes son proporcionales porque los lados de un pentágono regular son iguales y, por tanto, el cociente entre dos lados homólogos es siempre el mismo.
d) Verdadero. Porque tienen los tres ángulos iguales 90°, 66° y 24°.

96. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

a) Todos los rectángulos son semejantes.
b) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
c) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.
d) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

97. Emprende

Halla la altura del edificio donde estudias utilizando únicamente un lápiz, un papel y una cinta métrica. Explica el método que has utilizado.

98. Una plancha de hierro fundido tiene una masa de 8,5 kg. ¿Qué masa tendrá otra plancha semejante del mismo metal y grosor si sus dimensiones son el triple de las de la plancha original?

99. Se quieren fabricar losetas como las de la figura que estén formadas por un rombo de diagonales 18,10 y 8,36 cm, respectivamente, y un cuadrado inscrito en él. Calcula el área de la zona verde y la suma de las áreas de las zonas naranjas.

100. Observa el decágono regular y contesta.

a) ¿Qué ángulo hay que recorrer para llevar el radio r desde el vértice A hasta B en el sentido contrario a las agujas del reloj?
b) ¿Adónde llegará r si se encuentra inicialmente en B y se le aplica un giro de 108°?
c) ¿Adónde llegará r si se encuentra inicialmente en G y se le aplica un giro de −144°?

101. El carnet del polideportivo tiene la propiedad de que el rectángulo ABCD que lo forma es semejante al rectángulo ECDF. La zona ABEF es un cuadrado de lado b. Calcula el cociente de las dos medidas a y b del carnet.

(FOTO)
(DATOS)
(CHIP)

ACTIVIDADES PARA PENSAR MÁS

102. El valor de h en la siguiente figura es:

A. h = 4 B. h = 6 C. $h = \sqrt{24}$ D. $h = \sqrt{10}$

103. El seno del ángulo α de la figura vale:

A. 0,3
B. 0,4
C. 0,5
D. 0,6

Encuentra el error

104. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo de área 46,875 cm² semejante a otro cuyos catetos miden 5 y 12 cm.

El área del triángulo semejante es $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ cm², y su hipotenusa, $\sqrt{5^2+12^2} = 13$ cm.

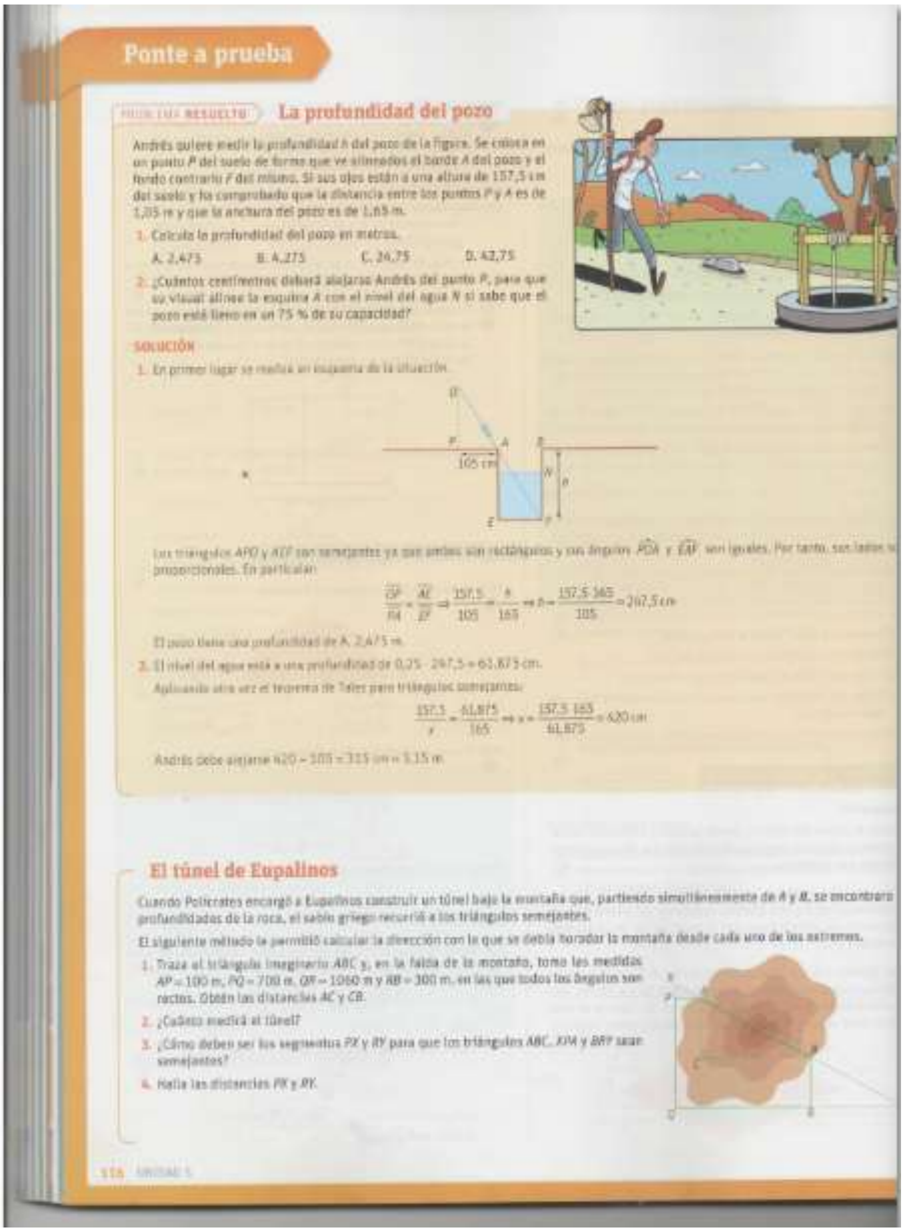
Luego, la razón de semejanza de los dos triángulos es:

$$\frac{46{,}875}{30} = 1{,}5625$$

La hipotenusa mide 13 · 1,5625 = 20,3125 cm.

¿Dónde está el error?

115



Ponte a prueba

PROBLEMA RESUELTO

La profundidad del pozo

Andrés quiere medir la profundidad h del pozo de la figura. Se coloca en un punto P del suelo de forma que ve alineados el borde A del pozo y el fondo contrario F del mismo. Si sus ojos están a una altura de 157,5 cm del suelo y ha comprobado que la distancia entre los puntos P y A es de 1,05 m y que la anchura del pozo es de 1,65 m.

1. Calcula la profundidad del pozo en metros.
A. 2,475 B. 4,275 C. 24,75 D. 42,75
2. ¿Cuántos centímetros deberá alejarse Andrés del punto P, para que su visual alinee la esquina A con el nivel del agua N si sabe que el pozo está lleno en un 75 % de su capacidad?

SOLUCIÓN

1. En primer lugar se realiza un esquema de la situación.

Los triángulos APO y AEF son semejantes ya que ambos son rectángulos y sus ángulos $\widehat{POA}$ y $\widehat{EAF}$ son iguales. Por tanto, sus lados son proporcionales. En particular:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{157,5}{105} = \frac{h}{165} \Rightarrow h = \frac{157,5 \cdot 165}{105} = 247,5 \text{ cm}$$

El pozo tiene una profundidad de A. 2,475 m.

2. El nivel del agua está a una profundidad de $0,25 \cdot 247,5 = 61,875$ cm.

Aplicando otra vez el teorema de Tales para triángulos semejantes:

$$\frac{157,5}{x} = \frac{61,875}{165} \Rightarrow x = \frac{157,5 \cdot 165}{61,875} = 420 \text{ cm}$$

Andrés debe alejarse $420 - 105 = 315$ cm $= 3,15$ m.

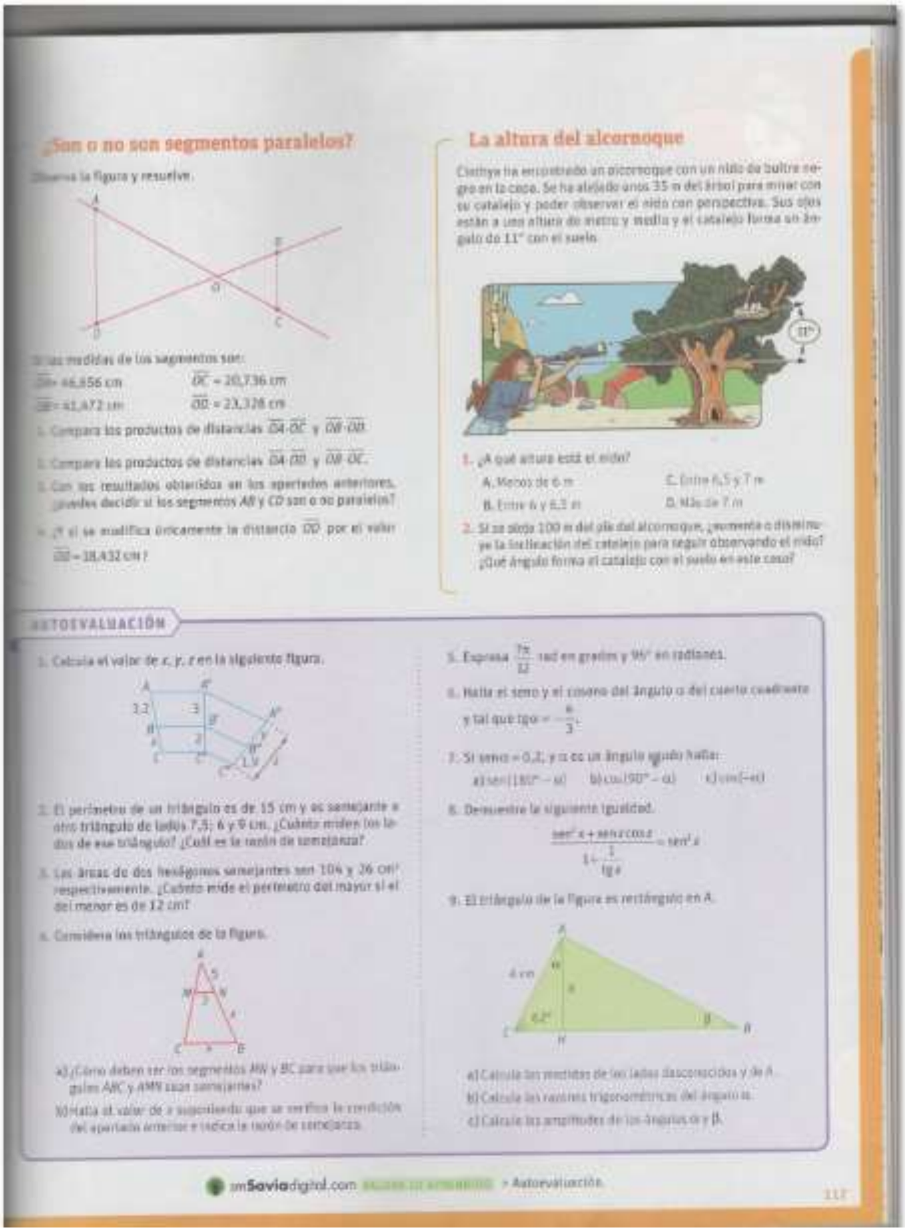
El túnel de Eupalinos

Cuando Polícrates encargó a Eupalinos construir un túnel bajo la montaña que, partiendo simultáneamente de A y B, se encontrara en las profundidades de la roca, el sabio griego recurrió a los triángulos semejantes.

El siguiente método le permitió calcular la dirección con la que se debía horadar la montaña desde cada uno de los extremos.

1. Traza el triángulo imaginario ABC y, en la falda de la montaña, toma las medidas $AP = 100$ m, $PQ = 700$ m, $QR = 1060$ m y $RB = 300$ m, en las que todos los ángulos son rectos. Obtén las distancias AC y CB.
2. ¿Cuánto medirá el túnel?
3. ¿Cómo deben ser los segmentos PX y RY para que los triángulos ABC, XPA y BRY sean semejantes?
4. Halla las distancias PX y RY.

116 UNIDAD 5



¿Son o no son segmentos paralelos?

Observa la figura y resuelve.

Si las medidas de los segmentos son:

$\overline{OA} = 46{,}656$ cm $\quad \overline{OC} = 20{,}736$ cm

$\overline{OB} = 41{,}472$ cm $\quad \overline{OD} = 23{,}328$ cm

1. Compara los productos de distancias $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$ y $\overline{OB} \cdot \overline{OD}$.
2. Compara los productos de distancias $\overline{OA} \cdot \overline{OD}$ y $\overline{OB} \cdot \overline{OC}$.
3. Con los resultados obtenidos en los apartados anteriores, ¿puedes decidir si los segmentos *AB* y *CD* son o no paralelos?
4. ¿Y si se modifica únicamente la distancia $\overline{OD}$ por el valor $\overline{OD} = 18{,}432$ cm?

La altura del alcornoque

Cinthya ha encontrado un alcornoque con un nido de buitre negro en la copa. Se ha alejado unos 35 m del árbol para mirar con su catalejo y poder observar el nido con perspectiva. Sus ojos están a una altura de metro y medio y el catalejo forma un ángulo de 11° con el suelo.

1. ¿A qué altura está el nido?
   A. Menos de 6 m
   B. Entre 6 y 6,5 m
   C. Entre 6,5 y 7 m
   D. Más de 7 m
2. Si se aleja 100 m del pie del alcornoque, ¿aumenta o disminuye la inclinación del catalejo para seguir observando el nido? ¿Qué ángulo forma el catalejo con el suelo en este caso?

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el valor de *x*, *y*, *z* en la siguiente figura.
2. El perímetro de un triángulo es de 15 cm y es semejante a otro triángulo de lados 7,5; 6 y 9 cm. ¿Cuánto miden los lados de ese triángulo? ¿Cuál es la razón de semejanza?
3. Las áreas de dos hexágonos semejantes son 104 y 26 cm² respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del mayor si el del menor es de 12 cm?
4. Considera los triángulos de la figura.
   a) ¿Cómo deben ser los segmentos *MN* y *BC* para que los triángulos *ABC* y *AMN* sean semejantes?
   b) Halla el valor de *x* suponiendo que se verifica la condición del apartado anterior e indica la razón de semejanza.
5. Expresa $\frac{7\pi}{12}$ rad en grados y 96° en radianes.
6. Halla el seno y el coseno del ángulo α del cuarto cuadrante y tal que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$.
7. Si $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}2$, y α es un ángulo agudo halla:
   a) $\operatorname{sen}(180° - \alpha)$ b) $\cos(90° - \alpha)$ c) $\cos(-\alpha)$
8. Demuestra la siguiente igualdad.
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \operatorname{sen}^2 x$$
9. El triángulo de la figura es rectángulo en *A*.
   a) Calcula las medidas de los lados desconocidos y de *h*.
   b) Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.
   c) Calcula las amplitudes de los ángulos α y β.

smSaviadigital.com > Autoevaluación

117

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Directores:
Laura Portero Egea
Andrés Arrarás Ventura
Departamento de Ingeniería Matemática e Informática